



KRISTALLBERECHNUNG
UND
KRISTALLZEICHNUNG

EIN HILFSBUCH
DER KRISTALLOGRAPHIE
MIT BETONUNG DER GRAPHISCHEN VERFAHREN, SOWIE DER ANALYTISCHEN UND ZONALEN BEZIEHUNGEN

VON

DR. PHIL. B. GOSSNER
PRIVATDOZENT AN DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MIT 1 TAFEL UND 109 ABBILDUNGEN IM TEXT



LEIPZIG UND BERLIN
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN
1914

Vorwort.

Im Rahmen eines Lehrbuches der Kristallographie finden die Methoden der praktischen Untersuchung nur schwer ihren Platz. Die Vielseitigkeit der Praxis steht in einem gewissen Gegensatz zur Einheitlichkeit, welche der wissenschaftlichen Disziplin zukommt. Man trennt deswegen auch allenthalben bei der zweckmäßigen Darstellung das eigentliche Lehrgebäude von den Einzelheiten der wissenschaftlichen Praxis. Insbesondere enthalten Kristallberechnung und Kristallzeichnung eine Vielseitigkeit von Methoden und eine große Mannigfaltigkeit von Aufgaben. Diese können im Lehrbuch der Kristallographie höchstens in einzelnen Beispielen angedeutet werden. Bisher haben wohl auch bereits einzelne neuere Abschnitte unseres Gebietes eine besondere Darstellung erfahren; doch finden sich manche Neuerungen nur in Abhandlungen zerstreut, was die Zugänglichkeit erschwert und den Überblick über das Gebiet der angewandten geometrischen Kristallographie nicht fördert. Darum dürfte es nicht überflüssig erscheinen, den älteren Hilfsbüchern ein neues anzureihen, indem die zusammenfassende Darstellung weiter ausgedehnt und in ihren Bereich die verschiedensten Hilfsmittel gezogen werden, welche die rechnende Kristallographie in ihrem gegenwärtigen Umfange besitzt.

Dem Sinne dieser Erörterungen entspricht nun ferner eine tatsächliche, von Herrn Geheimrat P. v. Groth veranlaßte Vereinbarung. Bei der Umgestaltung seiner »Physikalischen Kristallographie« soll eine Entlastung eintreten, insbesondere auch durch Wegbleiben eines eigenen Abschnittes über Berechnung und graphische Darstellung der Kristallformen. An seine Stelle soll der vorliegende Versuch einer zusammenfassenden Darstellung dieses Teiles der praktischen Kristallographie treten; es stellt sich also auch in dieser äußerlichen Beziehung zum genannten Lehrbuch das Ergebnis als Hilfsbuch im Bereich der kristallographischen Wissenschaft dar.

Ein weiterer Anlaß zur Herausgabe lieferte gleichzeitig die Gesichtspunkte, welche der Abfassung des Buches zugrunde liegen. Die Methoden der rechnerischen Kristallographie sind durch Einführung graphischer Verfahren und durch eine erweiterte Nutzbarmachung analytischer und zonaler Beziehungen nicht unwesentlich ausgebaut und gleichzeitig vereinfacht worden; die leichte und bequeme Ausnutzung der daraus sich ergebenden Hilfsmittel setzt aber die Zusammenfassung in eigener Darstellung voraus. In der besonderen Betonung dieser Hilfsmittel will das Buch nicht allein der an-

gewandten Wissenschaft dienen; auch beim Studium der Kristallographie selbst gebührt den einfachen Verfahren erweiterte Verwendung.

Mit Rücksicht auf die vollständige Darstellung der Grundlagen der angewandten geometrischen Kristallographie oder aus didaktischen Gründen wurde manches mit aufgenommen, was nicht in erster Linie für eine rein praktische Verwendung bestimmt ist. So besitzt z. B. die Zeichnung eines Kristalles aus dem Achsenkreuz gegenüber anderen Methoden nur mehr geringe Bedeutung, durfte aber trotzdem wohl nicht wegbleiben. Die Erwähnung stereographischer Transporteure dient vorwiegend der Didaktik der stereographischen Projektion überhaupt.

Die Abfassung des Buches war in den Hauptzügen bereits vor mehr als zwei Jahren vollendet; äußere Umstände haben die endgültige Fertigstellung für den Druck verzögert.

München, im Januar 1914. **B. Goßner.**

Inhaltsverzeichnis.

Literatur.

Das folgende ist ein Verzeichnis der bei der Abfassung benutzten Werke und Abhandlungen. Es soll Literaturangaben im Text ersetzen, wo deren Einfügung wohl kaum zum Vorteil geschehen kann.

Dufet, H., Sur le calcul crystallographique. Bull. de la Soc. franç de Mineral. 1903, **26**, 190.
Fedorow, E. v., Zeitschr. für Krystallographie. **26**, **27**, **28**.
Goldschmidt, V. Über Projektion und graphische Krystallberechnung. 1887. Zeitschr. für Krystallographie. 1890, **17**, 97; 1892, **20**, 143; 1899, **30**, 260.
Groth, P., Physikalische Krystallographie. 4. Aufl. 1905. Daraus stammen auch die Figuren 65, 68, 71—76, 78.
Hecht, B., Anleitung zur Krystallberechnung. 1893.
Hutchinson, A., ein Transporteur für die stereographische und gnomonische Projektion. Zeitschr. für Krystallographie. 1909, **46**, 225.
Jolles, St., orthogonale Projektion krystallographischer Achsensysteme. Zeitschr. für Krystallographie. 1894, **22**, 1.
Krejčí, J., Elemente der mathematischen Kristallographie. Prag 1886.
Liebisch, Th., Geometrische Krystallographie. 1881.
Miller, W. H., Lehrbuch der Krystallographie. 1856.
Naumann, C. F., Lehrbuch der reinen und angewandten Krystallographie. 1830
Penfield, L., Zeitschr. für Krystallographie. 1902, **35**, 1.
— Zeitschr. für Krystallographie. 1907, **43**, 1.
Schrauf, A., Lehrbuch der physikalischen Mineralogie I. 1866.
Stöber, F., Zeitschr. für Krystallographie. 1901, **34**, 621.
Story-Maskelyne, N., Crystallography. Oxford 1895.
Viola, C., Grundzüge der Krystallographie Leipzig 1904.
Weisbach, J., Anleitung zum axonometrischen Zeichnen. 1857.
Wulff, G., Zeitschr. für Krystallographie 1893, **21**, 249; 1902, **36**, 14.

Bezugsquellen der graphischen Hilfsmittel.

Für die Beschaffung der graphischen Hilfsmittel dürfte die Angabe von Bezugsquellen nicht unerwünscht sein. Es sind zu beziehen:

Stereographisches Netz nach G. Wulff durch Hubert Köhler, Lithogr. Anstalt, München, Blütenstr.;

Gnomonisches Netz nach V. Goldschmidt durch P. Stoë, Mech. Werkstätte, Heidelberg;

Stereographischer Transporteur nach Hutchinson durch W. H. Harling, London, 47 Finsbury Pavement.

Betreffs des stereographischen Transporteurs von Penfield wende man sich an das Mineralog. Inst. (Prof. W. E. Ford) der Yale-University, New Haven, U. S. A.

Einleitung.

Kristallberechnung und Kristallzeichnung sind die wichtigsten Hilfsmittel bei der Zusammenfassung und Darstellung der Resultate einer geometrischen Kristalluntersuchung.

Die vollständige geometrische Untersuchung eines Kristalles nimmt folgenden Verlauf:

Mit Hilfe der goniometrischen Messung bestimmt man die Winkel zwischen den einzelnen Flächen und ermittelt insbesondere auch deren Zonenbeziehungen.

Das Ergebnis dieser Messungen verwendet man in Verbindung mit der optischen Prüfung zur Ermittelung des Kristallsystemes.

Nun kommt die Wahl der Richtungen der Kristallachsen (Koordinatenachsen), soweit hier noch Freiheiten bestehen, sei es mit Rücksicht auf das System überhaupt, oder auf das Erfordernis der einfachsten Zonenbeziehungen oder auf besondere physikalisch (durch Spaltbarkeit) ausgezeichnete Richtungen. Es werden dies die Zonenachsen [100], [010] und [001]. Den Kristall stellt man dann in der herkömmlichen Weise so auf, daß eine Achse vertikal steht (*c*-Achse), die zweite (*b*-Achse) bildet mit der ersteren Achse die quer verlaufende Ebene. Die dritte Achse (*a*-Achse) erscheint dann nach vorn gerichtet, wobei die Ebene *ab*, falls sie nicht in speziellen Fällen horizontal ist, nach abwärts geneigt ist (Fig. 1). Die acht abwechselnden (im allgemeinen ungleichen) Oktanten werden durch das Vorzeichen der drei Achsenrichtungen unterschieden (Fig. 1). Nun bestimmt man durch Rechnung unter Zugrundelegung gemessener Winkelwerte das Achsenverhältnis $a:b:c = x:1:y$ für die Grundfläche (111); x und y werden bei dem üblichen Grade der Genauigkeit der Messungen als vierstellige Dezimalzahlen angegeben.

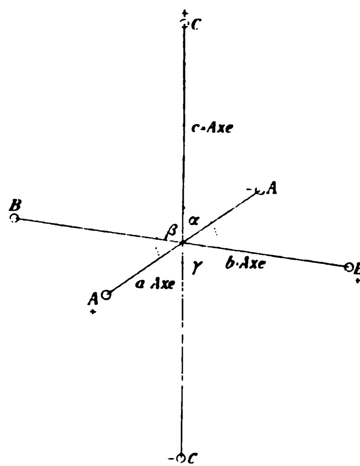


Fig. 1.

Die drei Winkel, welche die drei Kristallachsen im allgemeinsten Falle paarweise einschließen, α, β, γ und das Achsenverhältnis $a:b:c$, also ins-

gesamt fünf unabhängige Größen, heißen die Elemente des Kristalles. Ihre Ermittelung bildet die erste Aufgabe der Kristallberechnung.

Die nächste Aufgabe ist die Ermittelung der Indizes aller Kristallflächen oder -formen, bezogen auf das einmal gewählte »Achsenkreuz«. Die Berechnung erfolgt aus Zonenbeziehungen oder Winkelmessungen.

Die nun folgende Aufgabe ist die Ermittelung von Winkelwerten zwischen einzelnen Flächen, welche aus den Elementen sich berechnen. Diese »berechneten Winkelwerte« stellt man den »beobachteten Werten« gegenüber. Der Vergleich liefert zugleich ein Maß für die Genauigkeit der Messungen.

Die letzte Aufgabe bei der geometrischen Kristalluntersuchung ist die Zeichnung von Kristallbildern. Es ist dies eine Projektion des Kristalles mit seinen Kanten, Ecken und Flächen auf eine bestimmte Ebene, nach den Prinzipien einer zeichnerischen Darstellung polyedrischer Gebilde überhaupt. In erster Linie sollen hierbei die Zonenbeziehungen, also der Parallelismus von Kanten zum Ausdruck kommen, weswegen jedes Kristallbild ein parallel projiziertes Polyeder darstellt. Die einfachsten Methoden stellen jedoch nicht die gewöhnlichen Methoden der Parallelprojektion dar, sondern bei der Zeichnung der Kristalle bieten spezifische Verfahren einen einfacheren Weg.

Bei der Berechnung und Zeichnung der Kristalle stehen gemeinsame allgemeine Aufgaben der speziellen Anwendung gegenüber. Darum teilen wir das gesamte Gebiet in zwei Hauptteile, einen allgemeinen und einen speziellen.

I. Allgemeiner Teil.

In diesem Teil sind die besonderen kristallographischen Hilfsmittel der einfachsten Behandlung und Darstellung der Zonenbeziehungen und Winkelverhältnisse, sowie allgemeine Formeln zu erörtern.

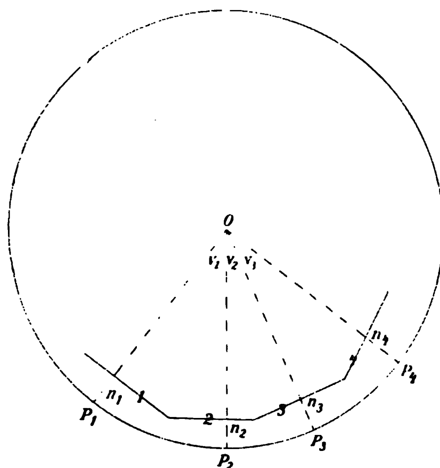


Fig. 2.

Winkel und Zonen.

An jedem Kristall kann man zweierlei Winkel unterscheiden. Am wichtigsten sind die Winkel zwischen zwei Flächen. Man gibt den Winkel als den Winkel zwischen den beiden Flächennormalen an; er ergibt sich direkt bei der gewöhnlichen Messung mit dem Reflexionsgoniometer. In Fig. 2 seien 1, 2, 3, 4 usw. Ebenen einer Zone, deren Achse auf der Zeichnungsebene senkrecht steht. On_1, On_2, On_3 ...

seien die Flächennormalen. Die Winkel sind der Reihe nach v_1, v_2, v_3 ....

Der Winkel zwischen zwei Kanten ist zugleich der Winkel zwischen den beiden Zonen, deren Achsen die beiden Kanten darstellen. Einzelne dieser Winkel bilden auch einen besonderen Gegenstand der Kristallberechnung. Es sind dies Winkel zwischen Kanten, welche in einer der drei Achsenebenen liegen. Die wichtigsten dieser Winkel sind wiederum jene zwischen den Achsen selbst, α, β, γ, also die Winkel zwischen den Zonenachsen [100], [010] und [001]. Diese drei Zonen nennen wir Zonen 1. Ranges. Es sind dies also jene drei Zonen, welche durch je zwei Achsenebenen bestimmt sind.

Fig. 3 stelle die drei Achsenebenen ab, ac und bc dar.

In der Ebene $[ab]$ sind die beiden Achsen $OA = a$ und $OB = b = 1$; der Winkel zwischen beiden ist γ. Die Kante AB ist die Achse der Zone (110) : (001), ebenso AB' die Achse der Zone (210) : (001). Solche Zonen, welche nur eine Achsenebene (Hauptpol) enthalten, nennen wir Zonen 2. Ranges, also z. B. (110) : (001); (010) : (011); (021) : (100) usw. Im Dreieck AOB ist das Verhältnis $a : b$ bestimmt, wenn γ und η_1 bekannt sind. Bei der Bestimmung des Achsenverhältnisses spielt also die Kenntnis eines solchen Winkels zwischen einer Zone 1. Ranges und einer solchen 2. Ranges eine Rolle.

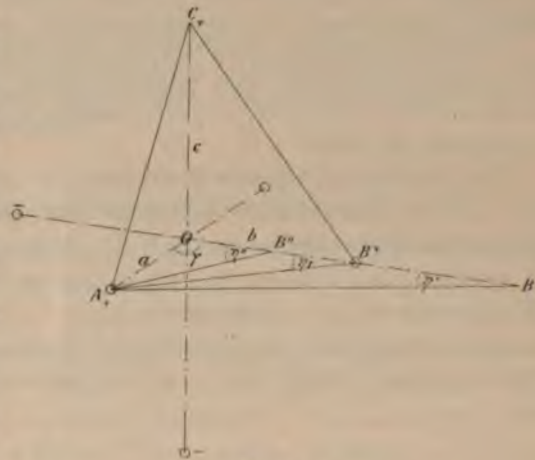


Fig. 3.

Jede Zone 3. Ranges enthält als speziellste Flächen nur noch Flächen mit einem Index Null, $(0kl)$, $(h0l)$ und $(hk0)$ nebst den zugehörigen Gegenflächen; sie geht also durch keinen der drei Hauptpole.

A. Methoden der einfachsten Darstellung der Winkel und Zonenbeziehungen.

(Stereographische und gnomonische Projektion.)

Man denke sich die Normalen zu den sämtlichen Flächen einer Zone durch einen Punkt im Innern des Kristalles gehend, dann erscheinen diese Normalen als Gerade in einer Ebene. In Fig. 2 ist eine solche Ebene dargestellt. Sie schneidet die Flächen dieser Zone in den Geraden 1, 2, 3 .... Die Normalen sind On_1, On_2, On_3 .... Um den Punkt O beschreibe

man einen Kreis. Die Normalen schneiden diesen in den Punkten $P_1, P_2, P_3 \ldots$. Diese Punkte bezeichnet man als **Pole** der Flächen 1, 2, 3 .... Alle Pole einer Zone liegen auf einem Kreis. Die Winkel zwischen zwei Polen können also direkt auf einem Kreis gemessen werden, als die Winkel P_1P_2, P_2P_3 ....

Von einem Mittelpunkt O innerhalb des Kristalles ziehe man nun die Normalen zu allen Flächen. Um O als Mittelpunkt beschreibe man eine Kugel mit beliebigem Radius. Die Normalen treffen diese Kugel in Punkten, den Polen P_1, P_2 ... der Flächen. Alle Flächenpole einer Zone liegen auf einem größten Kreis; jede Zone stellt sich auf der Kugel als Großkreis dar. Dem Schnittpunkt zweier Großkreise entspricht eine mögliche Kristallfläche. Die Abstände der einzelnen Pole, auf einem solchen Kreis gemessen, entsprechen dem wahren Winkel zwischen den beiden Flächennormalen.

Auch die Normale durch O auf jede Ebene von Zonennormalen, die Zonenachse schneidet die Kugeloberfläche in zwei gegenüberliegenden Punkten, den Zonenpolen. Diese beiden Pole sind um 90° entfernt vom Großkreis der Zone.

Der Abstand zwischen zwei Zonenpolen entspricht dem Winkel zwischen den beiden Zonenachsen (Kanten), also dem **Winkel zweier Zonen**. Dieser Winkel ist anderseits auch der Winkel zwischen den beiden Ebenen, in welchen die Flächennormalen liegen, ist also der Winkel zwischen zwei Großkreisen auf der Kugeloberfläche.

In Fig. 4b sind die Flächen und Zonen der Fig. 4a (kubische Kombination {100}, {110}, {111}) auf die beschriebene Weise zur Darstellung

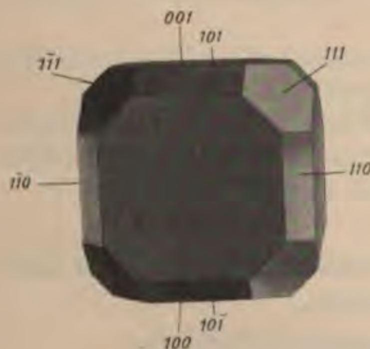


Fig. 4a.

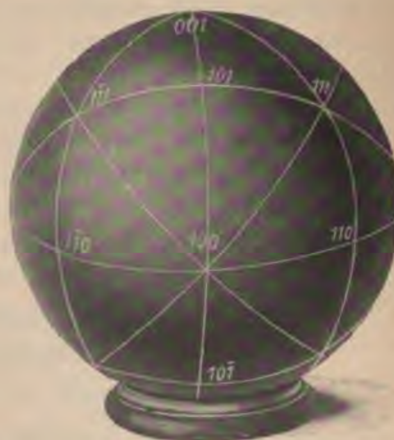


Fig. 4b.

gebracht. **Jede Fläche erscheint bei der Darstellung als Punkt, jede Zone als Großkreis.**

Außer den Großkreisen, welche also die Zonen eines Kristalles darstellen, gibt es auf der Kugeloberfläche noch Kleinkreise. Der Kleinkreis besitzt einen bestimmten Winkelradius φ und auf der Kugeloberfläche einen Mittelpunkt. Der Kleinkreis ist der geometrische Ort aller Punkte, welche von diesem Punkte auf der Kugeloberfläche um den gleichen Winkel φ entfernt sind. Der Radius eines Kleinkreises in der Schnittebene mit der Kugel ist kleiner als jener der Großkreise, welcher gleich dem Kugelradius ist.

Durch jeden Punkt auf der Kugeloberfläche gibt es beliebig viele Großkreise; sie haben alle einen gemeinsamen Durchmesser, nämlich den durch diesen Punkt gehenden Kugeldurchmesser.

Drei beliebige Großkreise schneiden sich in drei Punkten; sie bestimmen ein sphärisches Dreieck.

Die Darstellung auf der Kugel läßt sich nun einfacher gestalten durch eine geeignete Projektion der Kugeloberfläche auf eine Ebene. Dieses kann nach verschiedenen Prinzipien geschehen. Die einfachsten Darstellungsmethoden der Zonen- und Winkelbeziehungen sind die stereographische und die gnomonische Projektion.

1. Stereographische Projektion.

Prinzip. Bei der stereographischen Projektion denkt man sich zuerst den Flächenkomplex eines Kristalles in der eben beschriebenen Weise auf der Kugeloberfläche dargestellt. Dann legt man die Projektionsebene so, daß sie mit der Ebene des horizontalen Großkreises zusammenfällt; Projektionsebene ist also die horizontale Ebene durch den Kugelmittelpunkt. Der »Augpunkt« ist der untere Pol zu diesem Großkreis. Davon aus ziehe man Strahlen (Gerade) nach den einzelnen Flächenpolen, zunächst nach jenen auf der oberen Kugelhälfte. Jede dieser Geraden schneidet die Projektionsebene in einem Punkte, der Projektion des zugehörigen Flächenpoles. Der Großkreis auf der horizontalen Projektionsebene erscheint dabei in seiner eigentlichen Größe als Grundkreis. Alle Pole der oberen Kugelhälfte erscheinen als Punkte innerhalb des Grundkreises; alle Punkte der unteren Hälfte kommen außerhalb zu liegen.

Die beiden Grundeigenschaften der stereographischen Projektion.

1. Alle Kreise auf der Kugeloberfläche erscheinen in der stereographischen Projektion wieder als Kreise.

Beweis: In Fig. 5 sei $A_1 A_0 A_2 A_3$ ein vertikaler Großkreis; A_0 sei der Augpunkt. Die Gerade $A_1 A_2$ ist die Spur der horizontalen Projektionsebene, p ein Punkt auf diesem vertikalen Kreis, um welchen mit dem Radius $pa = pb$ ein beliebiger Kleinkreis beschrieben sei. Die Gerade ab sei der Durchschnitt der Ebene des Vertikalkreises mit der dazu senkrechten Kleinkreisebene.

Die Strahlen von A_0 nach den Punkten des Kleinkreises liegen auf dem Mantel eines schiefen Kegels mit der Spitze in A_0. Die Ebene mit der Spur ab, unter dem Winkel α geneigt, ist dabei eine Kreisschnittebene.

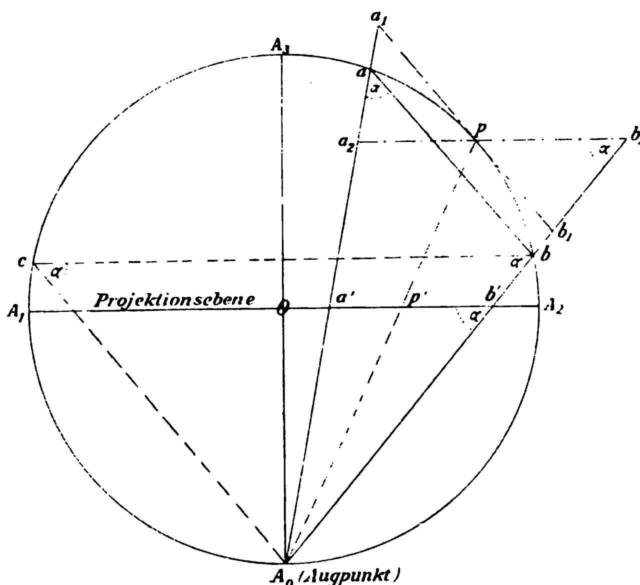


Fig. 5.

Die zu ab parallele Ebene mit der Spur $a_1 b_1$ — zugleich Tangentialebene in p — liefert ebenfalls einen Kreisschnitt (parallele Kegelschnitte). Dasselbe gilt für eine zur Zeichnungsebene senkrechte Ebene mit der Spur $a_2 b_2$, welche durch p gegen $A_0 b_2$ unter dem Neigungswinkel α gelegt wird.

$a'b'$ ist ein Durchmesser der Projektion des Kleinkreises ab.

Nun ziehe man $bc \parallel A_1 A_2$ und verbinde c und b mit A_0. Dann ist $\sphericalangle A_0 cb = \sphericalangle A_0 bc = \alpha$ (weil $\sphericalangle A_0 ab = \sphericalangle A_0 cb$, als Winkel über demselben Bogen); ebenso $\sphericalangle a'b'A_0 = \alpha$. Die beiden Ebenen mit den Spuren $a_2 b_2$, bzw. $a'b'$ sind also parallel. Nachdem die erstere den Kegel in einem Kreis schneidet, muß dies notwendig auch die Ebene mit der Spur $a'b'$ tun. Ihr Durchschnitt mit dem Kegel ist aber die Projektion des Kleinkreises ab. Also ist die stereographische Projektion eines solchen Kreises wieder ein Kreis.

Auf einfachem Wege kann man folgendes erkennen: alle Kreise auf der Kugeloberfläche, welche durch den »Augpunkt« gehen, erscheinen in der stereographischen Projektion als Gerade, d. h. als Kreise mit unendlich großem Radius. Die Großkreise dieser Art werden zugleich Durchmesser des Grundkreises, während Kleinkreise durch den Augpunkt Sehnen darstellen.

Jeder Großkreis der Projektion besitzt zwei ausgezeichnete Punkte, den Mittelpunkt und den Pol (gleich dem um 90° von der Peripherie entfernten Punkt; nebst Gegenpol). Die beiden Pole eines Großkreises durch den Augpunkt liegen auf der Peripherie des Grundkreises; ein solcher Großkreis und seine beiden Pole bestimmen zwei zueinander senkrechte Durchmesser.

2. Die stereographische Projektion ist winkeltreu, d. h. zwei Großkreise, welche sich auf der Kugeloberfläche unter einem bestimmten Winkel schneiden, erscheinen in der stereographischen Projektion als zwei sich schneidende Kreise, deren Tangenten im gemeinsamen Schnittpunkt den gleichen Winkel einschließen.

Beweis (Fig. 6): $A_1 A_0 A_2 A_3$ sei wieder ein vertikaler Großkreis, p ein Flächenpol darauf und A_0 der Augpunkt; $A_1 B$ sei die Spur der Projektionsebene, welche senkrecht zur Zeichnungsebene steht. p' ist die stereographische Projektion von p. pB ist die Durchschnittsgerade der Tangentialebene an die Kugeloberfläche in p. Zwei beliebige Gerade durch p in dieser Ebene bestimmen den Winkel zwischen den beiden Großkreisen, für welche sie Tangenten darstellen.

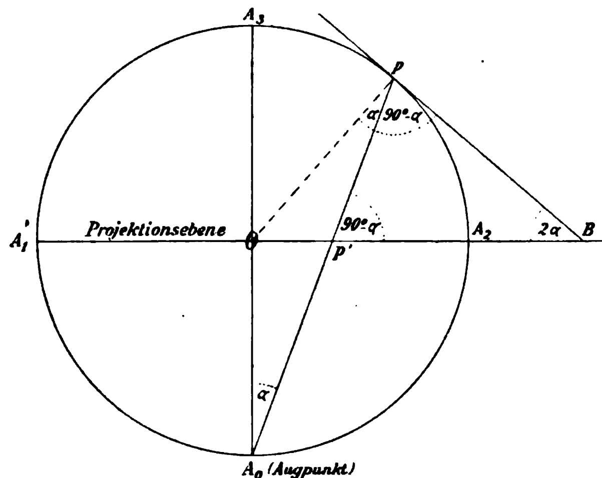


Fig. 6.

Nun sind die in der Figur eingetragenen Winkelbeziehungen ohne weiteres ersichtlich, ebenso daß $pB = p'B$. Die Projektion der Tangentialebene erfolgt also einfach durch Umklappung um ihre Schnittgerade mit der horizontalen Projektionsebene, d. h. um eine Achse durch B senkrecht zur Zeichnungsebene. Bei einer solchen Umklappung behalten aber alle Geraden in der Ebene ihre Richtung, also auch alle Tangenten durch p. Also schließen die Tangenten an alle Kreise durch p' dieselben Winkel ein, wie die Tangenten durch p an die zugehörigen größten Kreise auf der Kugeloberfläche.

Fig. 7 soll eine stereographische Projektion erläutern. Sie stellt die Projektion auf die Ebene parallel (001) einer kubischen Kombination {100}, {110}, {111} dar, wie sie Fig. 1 a und b wiedergeben. Eingezeichnet sind nur die Pole der vier oberen Oktanten, welche innerhalb des Grundkreises zu liegen kommen; die Pole der unteren Hälfte, welche außerhalb des Kreises liegen würden, sind weggelassen. Der Augpunkt liegt unter der Papierebene genau senkrecht unter (001). Die Pole der vertikalen Zone (100), (110), (010) usw. liegen auf dem Grundkreis. Als Kreise, welche durch den Augpunkt gehen und also als Durchmesser sich projizieren, erscheinen beispielsweise die Zonen $(1\bar{1}0)$, $(1\bar{1}1)$, $(001) \ldots$, ferner (100), (101) . . . usw. Der Pol zu einer solchen Zone liegt auf dem Grundkreis. Um die Projektion p' eines beliebigen Poles ist ein Kleinkreis k mit dem Mittelpunkt 0 gezeichnet; sein Radius ist 36°.

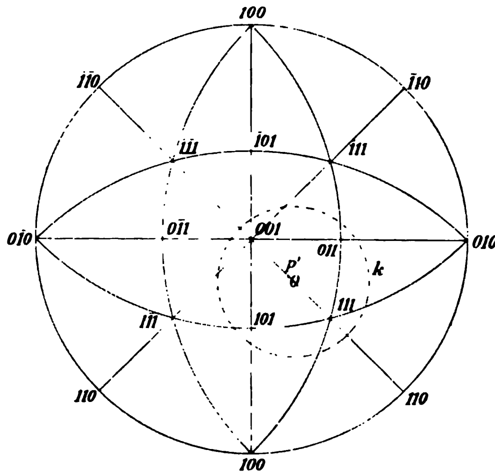


Fig. 7.

Der Punkt (001) erscheint zugleich als Pol zum Grundkreis, d. h. er ist die Projektion des Durchtrittspunktes der vertikalen Zonenachse oder kurz der um 90° von jedem Punkt des Grundkreises entfernte Punkt. Auch zu anderen Großkreisen erscheint in unserer Projektion der Pol schon eingezeichnet als rationaler Flächenpunkt, so zur Zone $(1\bar{1}0)$, $(1\bar{1}1)$ . . . der Pol (110); zur Zone (100), (011) . . . der Pol $(0\bar{1}1)$. Es liegt natürlich immer ein spezieller Fall vor, wenn der Pol zu einem Großkreise mit einer rationalen Fläche zusammenfällt.

Grundaufgaben der stereographischen Projektion.

Auf Grund unserer Kenntnis der beiden Haupteigenschaften der stereographischen Projektion sind wir imstande, jeden Komplex von Kristallflächen nach seinen wahren Beziehungen stereographisch zu zeichnen, ohne weiterhin Rücksicht auf das Prinzip und die Ableitung unserer Methode nehmen zu müssen. Dabei wiederholen sich immer einzelne Grundaufgaben, welche also im voraus zu erledigen sind.

Viele dieser Hauptaufgaben lassen sich am einfachsten lösen, wenn wir zuerst den folgenden Satz vorausschicken:

Der Winkel zwischen zwei Punkten a' und a'' (Flächenpolen) auf einem Großkreis G_1 (Fig. 8) läßt sich auf dem Grundkreise G_2 in seiner wahren Größe darstellen, indem man vom Pol P_1 des

Großkreises G_1 durch a' und a'' Gerade zieht, welche den Grundkreis in den Punkten b' und b'' schneiden. Der Bogen $b'b''$ ist die wahre Größe von $a'a''$, der Winkel $b'Ob''$ also der Winkel zwischen den beiden Flächenpolen a' und a'' (O ist Mittelpunkt des Grundkreises).

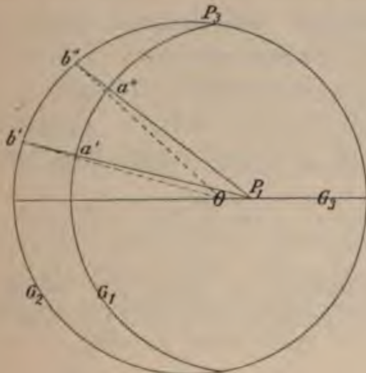


Fig. 8.


Fig. 9.

Beweis. In Fig. 9 seien G_1 und G_2 zwei Großkreise auf der Kugeloberfläche, welche sich in P_3 schneiden. P_3 ist der Pol zu einem dritten Großkreis G_3, welcher in den Schnittpunkten a und b auf G_1 und G_2 senkrecht steht. P_1 ist der Pol zu G_1, P_2 jener zu G_2.

Ein beliebiger Kleinkreis K durch P_1 und P_2 schneidet G_1 und G_2 in den Punkten a' und b', wobei offenbar $aa' = bb'$.

In Fig. 10 gehen wir über zur stereographischen Projektion dieser Zonen und Pole. G_2 wurde als horizontaler Grundkreis genommen, wobei P_2 den Augpunkt bildet. G_1 sei die Projektion des zweiten Großkreises durch P_3, G_3 projiziert sich als Gerade mit den Schnittpunkten b und a auf G_2 und G_1. Ebenso sei P_1 in die Projektion eingezeichnet. Das Bogenstück P_3b erscheint auf dem Grundkreis in seiner wahren Größe. Der Kleinkreis K geht ebenfalls durch den Augpunkt P_2, projiziert sich also ebenfalls als Gerade, welche durch P_1b' geht und G_1 wieder in a' schneidet. Dabei ist Bogen $P_3a' = P_3b'$. Ebenso ist natürlich für einen zweiten Kleinkreis K_1 durch P_2 und P_1 $P_3b'' = P_3a''$: also auch $b'b'' = a'a''$.

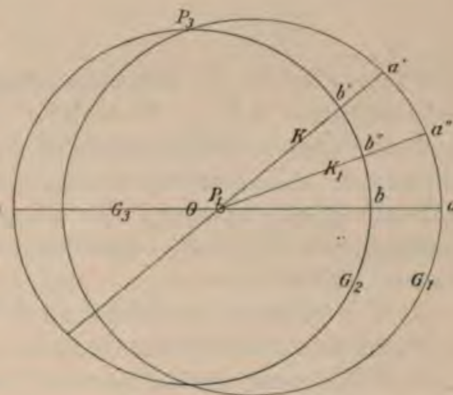


Fig. 10.

Um also den wahren Bogenabstand zweier Punkte $a'a''$ auf einem beliebigen Großkreis zu finden, suche man den Pol P_1 zu diesem Großkreis

innerhalb des Grundkreises, verbinde P_1 mit a' und mit a'' durch Gerade. Diese beiden Geraden schneiden den Grundkreis in zwei Punkten b' und b'', deren Abstand den wahren Abstand $a'a''$ angibt. In Fig. 8 ist diese Konstruktion für den gewöhnlichen Fall, daß a' und a'' innerhalb des Grundkreises liegen, ausgeführt.

Mit Hilfe dieser Beziehung kann man jetzt auf einfache Weise die folgenden Aufgaben der stereographischen Projektion lösen, zumal wir außerdem noch wissen, daß die Pole zu den Großkreisen durch den Augpunkt, also zu den Durchmessern des Grundkreises auf der Peripherie dieses Grundkreises liegen und zwar immer auf dem zugehörigen senkrechten Durchmesser:

1. Zu einem beliebigen Großkreis G den Pol P zu suchen (Fig. 11).

Dieser Pol (Fig. 11) liegt auf dem Durchmesser durch M, welcher senkrecht auf $p_1 p_1'$ steht, und zwar um 90° entfernt von M. Der Pol zu

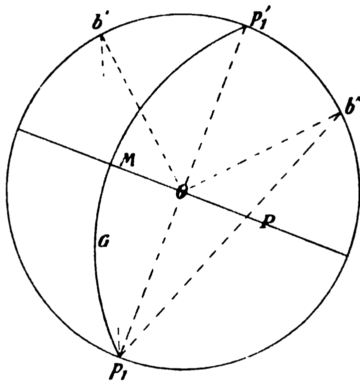


Fig. 11.

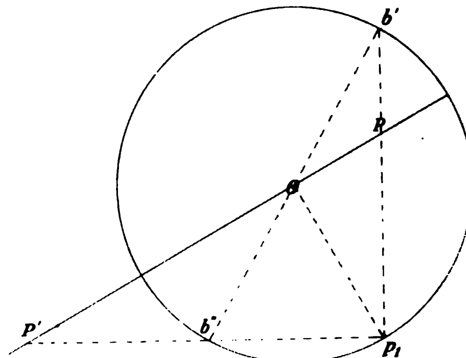


Fig. 12.

MO selbst liegt in p_1. Man ziehe also $p_1 M$ bis nach b', mache $b'Ob'' = 90°$ und verbinde b'' mit p_2. Dann ist P der gesuchte Pol.

2. Zu einem beliebigen Pol P den zugehörigen Großkreis G zu finden. (Umkehrung von 1.) Man ziehe Durchmesser PO, dazu senkrecht $p_1 p_1'$, ferner $p_1 P$ bis b'', mache $b''Ob' = 90°$ und ziehe $b'p_1$, wodurch man M erhält. Nun hat man drei Punkte: p_1, p_1' und M des gesuchten Großkreises.

3. Den Winkel zwischen zwei Flächenpolen auf einem Großkreis zu messen (Fig. 8).

4. Auf einem Großkreis von einem gegebenen Punkt aus einen bestimmten Winkel abzutragen (Umkehrung von 3).

5. Zu einem Pol P den Gegenpol P' zu suchen (Fig. 12), d. h. den um 180° davon entfernten Punkt.

P und P' liegen auf demselben Großkreis durch den Augpunkt, also in stereographischer Projektion auf der Geraden durch P und O. Man

hat auf diesem Großkreis den Punkt im Abstand 180° von P (wie bei Fig. 8) zu suchen. Man ziehe also $OP_1 \perp OP$ und erhält den Pol p_1 zur Geraden OP; dann ziehe man $p_1 P$ und erhält b' auf dem Grundkreis, davon um 180° abstehend b''. Nun ziehe man $p_1 b''$, bis die Verlängerungen von PO und $p_1 b''$ sich in P' schneiden; P' ist der Gegenpol zu P.

Jede Gerade durch die Mitte O des Grundkreises (Fig. 10) schneidet einen beliebigen größten Kreis G_1 in zwei Punkten, deren Abstand 180° ist.

6. **Durch zwei Flächenpole P und P_1 den größten Kreis zu ziehen.**

a) Man suche zu dem einen Pol, etwa P, noch den Gegenpol P' (nach 5) und hat jetzt drei Punkte des zu zeichnenden Kreises.

b) In vielen Fällen, besonders bei sehr flachen Kreisen oder bei Anwendung graphischer Methoden, empfiehlt sich ein anderes Verfahren, welches zunächst die beiden Schnittpunkte des gesuchten Großkreises mit dem Grundkreis liefert (Fig. 13).

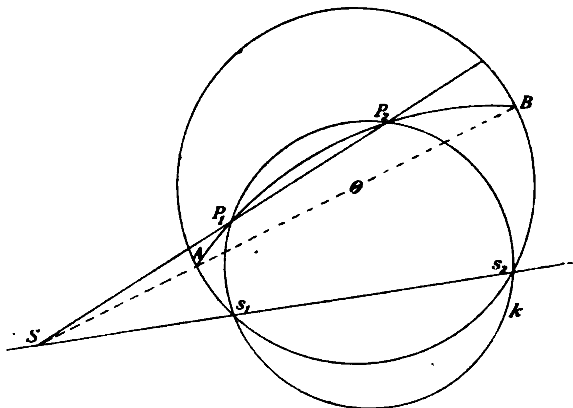


Fig. 13.

Man zeichne durch die beiden Pole P_1 und P_2 einen beliebigen Kreis k, welcher den Grundkreis in s_1 und s_2 schneidet. Man ziehe die beiden Sehnen P_1P_2 und s_1s_2; der Schnittpunkt ihrer Verlängerung ist S. Der Durchmesser SO liefert auf dem Grundkreis die beiden gegenüberliegenden Punkte A und B, welche die Schnittpunkte des gesuchten Großkreises mit dem Grundkreise sind. Der Großkreis ist also damit bestimmt.

Bei speziellen Lagen können sich diese Konstruktionen wesentlich vereinfachen, so wenn einer der beiden Pole auf der Peripherie des Grundkreises liegt oder wenn die beiden Flächenpole gleichweit vom Mittelpunkt entfernt sind. In vielen Fällen, besonders bei der Messung des Winkelabstandes, genügt es, den Pol zum gesuchten Großkreis zu kennen. Diesen erhält man auf einfache Weise als Schnittpunkt der beiden Polkreise zu den beiden gegebenen Punkten P_1 und P_2.

7. Den Winkel zwischen zwei Großkreisen zu messen.

Diese Aufgabe kann man auf verschiedene Weise lösen.

a) Man ermittelt nach 2 den Großkreis G_3 (Fig. 14), zu welchem der Schnittpunkt P_3 der beiden gegebenen Großkreise G_1 und G_2 den Pol darstellt. Der Abstand der beiden Punkte a und b, zu messen nach 3, stellt den gesuchten Winkel dar.

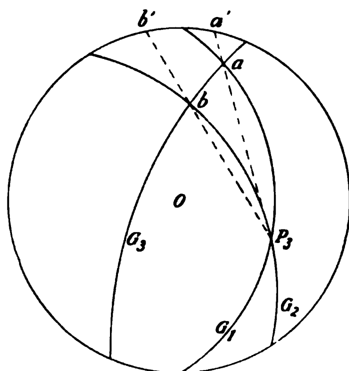


Fig. 14.

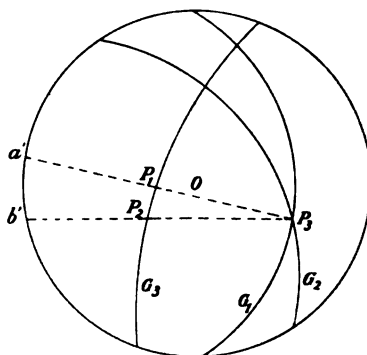


Fig. 15.

b) Man suche zu jedem der beiden Großkreise G_1 und G_2 den Pol P_1 und P_2 nach 1, zeichne nach 6 den Großkreis G_3 durch P_1 und P_2 und messe nach 3 den Abstand P_1P_2, was ebenfalls den gesuchten Winkel liefert (Fig. 15).

8. Durch einen Flächenpol P_3 auf einem gegebenen Großkreis einen zweiten Großkreis so zu ziehen, daß beide einen bestimmten Winkel einschließen (Umkehrung von 7).

a) Man suche zu dem Pol P_3 auf dem gegebenen Kreis G_1 (Fig. 14) den Großkreis G_3 und erhält den Schnittpunkt a; von diesem aus trage man das Bogenstück ab ab nach 4 entsprechend dem gegebenen Winkel. Der Großkreis durch b und P_3, nach 6 zu zeichnen, ist der gesuchte Großkreis G_2.

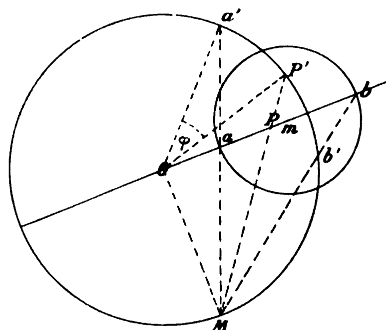


Fig. 16.

b) Man suche den Pol P_1 zu G_1 (Fig. 15) und ziehe dadurch den Großkreis G_3 zu P_3 als Pol. Dann mache man P_1P_2 nach 4 gleich dem gegebenen Winkel und ziehe nun zu P_2 als Pol den zugehörigen Großkreis G_2, welcher durch P_3 unter dem gegebenen Winkel gegen G_1 geht.

9. Zeichnung eines Kleinkreises mit gegebenem Winkelradius φ um einen Pol der stereographischen Projektion (oder den geometrischen Ort aller Punkte zu finden, welche von einem gegebenem Pol um den gleichen Winkel φ entfernt sind).

In Fig. 16 sei P der gegebene Punkt. Man ziehe den Durchmesser PO. Auf diesem liegen zwei Punkte a und b des gesuchten Kleinkreises; ab ist zugleich ein Durchmesser desselben. Man erhält a und b nach 4; man mache $OM \perp PO$, ziehe MP' und mache $P'a' = P'b' = \varphi$, ziehe Ma' und Mb' und erhält ab als Durchmesser des projizierten Kleinkreises mit m als Mittelpunkt.

Einfach ist auch das folgende Verfahren, welches in manchen Fällen den Vorzug verdient (Fig. 17). Man ziehe durch P zwei Großkreise, PO (Durchmesser) und den hierzu senkrechten Großkreis APB. Die beiden zugehörigen Pole sind B und P_1. Man mache nach 4 $Pb = Pa = \varphi$. Man kennt also zwei (mit b' drei) Punkte a und b der Peripherie des gesuchten Kleinkreises und weiß, daß der Mittelpunkt m auf dem Durchmesser OP liegt; damit ist der Kleinkreis selbst bestimmt. Dieses Verfahren wird insbesondere angewandt, wenn P auf der Peripherie des Grundkreises liegt (Fig. 18) oder wenn der ebene Radius des Kleinkreises sehr groß wird.

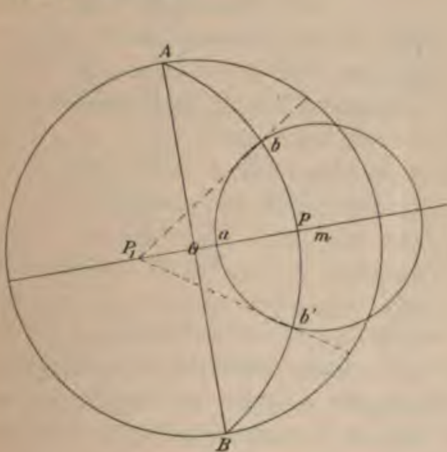


Fig. 17.

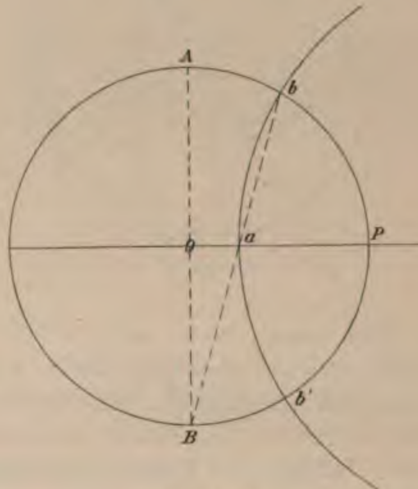


Fig. 18.

Anm. 1. Durch Abtragung aller möglichen Winkel erhält man ein System von Kleinkreisen um den Punkt P.

Anm. 2. Die Schnittpunkte zweier Kleinkreise mit den Radien φ_1 und φ_2 um die beiden Pole P_1 und P_2 sind jene Punkte, deren Lage durch ihre Abstände φ_1 und φ_2 von den beiden Punkten P_1 und P_2 bestimmt ist.

10. Konstruktion und Auflösung sphärischer Dreiecke.

Die ganze und teilweise Bestimmung der Bestandteile eines sphärischen Dreieckes und auch die Konstruktion solcher Dreiecke spielt bei der Kristallberechnung eine besondere Rolle. Die Messung von Seiten (Abstand zweier Punkte auf einem Großkreis) und Dreieckswinkeln (Winkel zweier Zonen) erfolgt nach den schon behandelten Methoden; ebenso

natürlich die Konstruktion von Dreiecken, doch ist auf letztere noch etwas näher einzugehen.

Ein sphärisches Dreieck kann wie ein gewöhnliches Dreieck aus drei Bestimmungsstücken konstruiert werden. Beispiele:

α) Ein sphärisches Dreieck ist zu konstruieren aus zwei Seiten a und c und dem eingeschlossenen Winkel β. Man mache (Fig. 19) $AB = c$, ziehe durch B nach 8 den Großkreis unter β gegen AB geneigt; auf diesem Großkreis mache man nach 4 $BC = a$ und ziehe nun nach 6 den größten Kreis durch A und C; dann ist das Dreieck konstruiert.

β) Ein Dreieck zu konstruieren aus den drei Seiten a, b und c (Fig. 20).

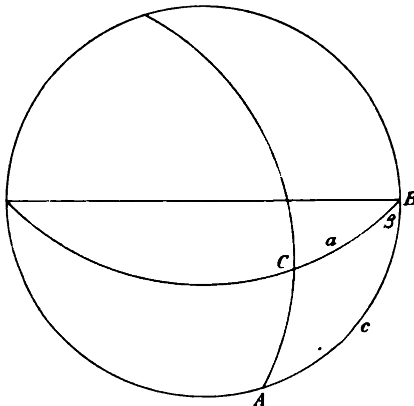


Fig. 19.

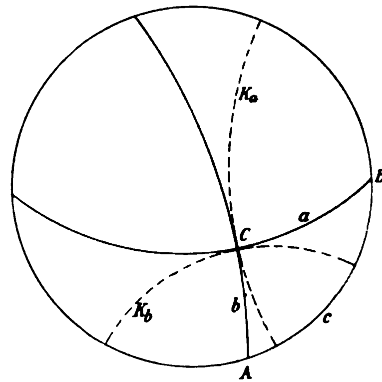


Fig. 20.

Man mache, wenn nicht näher bestimmt, auf einem beliebigen Großkreis, etwa auf dem Grundkreis, $AB = c$. Dann beschreibe man nach 9 um A den Kleinkreis K_b mit dem Radius b, um B jenen mit dem Radius a. Die Aufgabe ist zweideutig; von den beiden Schnittpunkten C und C' ist nach Maßgabe der Flächenbeziehungen der richtige zu wählen. Hier haben wir das Dreieck ABC mit C innerhalb des Grundkreises konstruiert, indem wir nach 6 die Großkreise durch A und C, bzw. B und C gezogen haben.

γ) Ein sphärisches Dreieck aus den drei Winkeln α, β, γ zu zeichnen. Dieser Fall ist kurz noch besonders zu erwähnen. Zu jedem der drei Eckpunkte eines Dreieckes als Pol gehört je ein weiterer Großkreis (nach 2 zu erhalten). Diese drei Großkreise bestimmen wiederum ein sphärisches Dreieck, welches als Poldreieck dem ersteren zugeordnet ist. Die Seiten des Poldreieckes sind gleich den Winkeln des Ausgangsdreieckes und die Winkel des Poldreieckes sind gleich dessen Seiten.

Das gesuchte Dreieck würde man also auf folgende Weise konstruieren: Man konstruiere mit α, β, γ als Seiten ein sphärisches Dreieck. Zu jeder dieser Seiten suche man dann den Pol; die drei Pole sind die Ecken des gesuchten Dreieckes.

11. Transformation einer stereographischen Projektion.

Hat man für einen bestimmten Komplex von Flächen auf irgend eine Ebene die stereographische Projektion ausgeführt, dann kann sich das Bedürfnis nach einer anderen Wahl der Projektionsebene geltend machen. Es gelingt auf einfache Weise, den gesamten Komplex der projizierten Pole und Zonen auf eine gewünschte neue Projektionsebene zu transformieren.

In Fig. 21 sind außer dem Grundkreise zwei Zonen Z_1, Z_2 in stereographischer Projektion gezeichnet. P ist der Pol einer Fläche, welche jetzt Projektionsebene werden soll. Man ziehe den Durchmesser PO (Hilfszone Y), welcher Z_1 in y_1 schneidet; ferner zeichne man den Polkreis (Hilfskreis X) zu P, dieser schneidet Z_1 in x_1. Ferner sei (y_1) der Gegenpol zu y_1. B ist natürlich Pol zum Durchmesser PO.

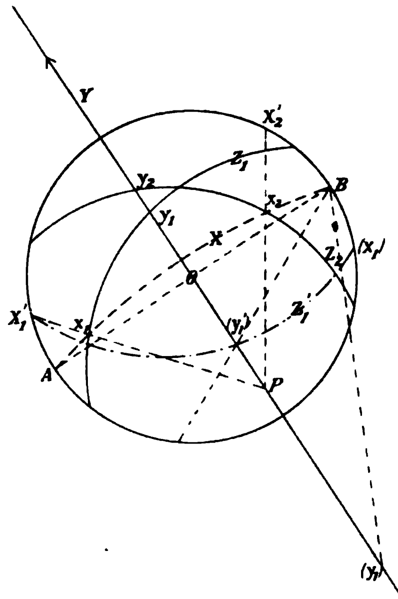


Fig. 21.

Die Transformation auf P vollzieht sich nun durch eine einfache Umdrehung um den Durchmesser AB, bis X als horizontaler Grundkreis erscheint. Der Umdrehungswinkel ist gleich dem Bogenabstand PO. P fällt also dann auf den Mittelpunkt O, A und B behalten bei der Umwälzung ihre Lage. Die Zone, welche dem Durchmesser PO entspricht, projiziert sich auch in der neuen Lage als gerader Durchmesser. Die Punkte darauf rücken einfach in der angedeuteten Richtung um den Winkel PO weiter.

Von jeder Zone erhält man nun auf einfache Weise nach der Transformation drei Punkte, wie die Transformation von Z_1 zeigen soll.

Diese Zone, wie jede andere, schneidet die beiden eingezeichneten Hilfszonen X und Y in zwei Punkten, hier x_1 und y_1. x_1 fällt nach der Transformation auf den Grundkreis nach x_1', wobei Bogen $Ax_1 = Ax_1'$. Man erhält also x_1', indem man die Gerade Px_1 zieht bis zum Durchschnitt mit dem Grundkreis. Ein zweiter Punkt (x_1) wird erhalten als Gegenpol zu x_1', indem man den Durchmesser $x_1'O$ zieht.

Zu y_1 sucht man in vielen Fällen zweckmäßig den Gegenpol (y_1). Man mache nach 4 auf dem Hilfskreis Y Bogen $(y_1)(y_1')$ gleich dem Bogenabstand PO, wobei B Pol ist. Dann ist (y_1') ein dritter Punkt des Großkreises Z_1 nach der Transformation; der transformierte Kreis selbst ist jetzt Z_1'.

Auf dieselbe Weise transformiert man der Reihe nach jede andere Zone. Das Verfahren ist also folgendes: Man zeichne in die gegebene Projektion den Pol P der neuen Projektionsebene ein, ziehe den Durchmesser PO (Hilfskreis Y) und konstruiere zu P den zugehörigen Polkreis X (nach 2). Dadurch erhält man für jede Zone zwei Schnittpunkte x und y — unter Umständen nehme man noch den Gegenpol (y) zu y in Verwendung. Diese beiden Punkte erhält man auf einfache Weise auch in der neuen transformierten Lage, wodurch die ganze Zone transformiert ist.

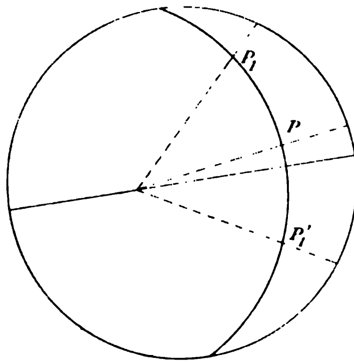


Fig. 22.

Eine vollständige Transformation ist wohl kaum oftmals nötig; doch findet ihre teilweise Ausführung eine besondere Anwendung beim Zeichnen von Kristallbildern.

Dagegen kommt bei der Anwendung der stereographischen Projektion auf Kristalle ein besonderer Fall der Transformation öfters vor, nämlich: Eine gegebene Projektion ist so zu transformieren, daß die Pole in der neuen Lage symmetrisch liegen in bezug auf eine bestimmte Umdrehungsachse (von 180°) zu je einem zugehörigen Pol der gegebenen Projektion. In Fig. 22 sei P_1 ein gegebener Pol, P der Pol der Drehungsachse, in bezug auf welche je ein Pol P_1 der gegebenen Projektion zu einem solchen P_1' nach der Transformation symmetrisch liege. Die drei Pole P_1, P, P_1' liegen offenbar auf demselben Großkreis, wobei außerdem noch Winkelabstand P_1P = Winkelabstand $P_1'P$ ist.

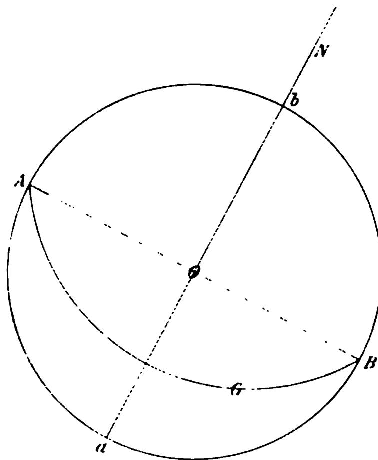


Fig 23.

Um also zu jedem Pol P_1 den in bezug auf eine Drehungsachse P dazu symmetrisch liegenden Pol P_1' zu finden, zeichne man nach 6 den Großkreis durch P_1 und P und mache darauf nach 4 Bogenabstand P_1P = Abstand PP_1'.

Der Aufgabe kommt eine Bedeutung zu bei der Darstellung von Zwillingskristallen in stereographischer Projektion. P ist der Pol der Zwillingsachse, P_1 und P_1' die entsprechenden Pole derselben Fläche an beiden Individuen.

12. Die Normale zur Ebene eines Großkreises G (Fig. 23) in orthogonaler Projektion auf die Zeichnungsebene darzustellen

(= orthogonale Projektion der Achse [Kante] der im Großkreis dargestellten Zone).

Diese Normale denken wir uns durch den Mittelpunkt der Kugel gehend; außerdem liegt sie dann in der Ebene des im Durchmesser *ab* projizierten Großkreises. Diese Ebene projiziert sich auch in orthogonaler Projektion (das Auge senkrecht in unendlicher Entfernung über der Projektionsebene oder der Ebene des Grundkreises) im Durchmesser *ab*. Also ist dieser Durchmesser auch die orthogonale Projektion der Normalen zu *G* oder der Zonenachse (Kristallkante) der in *G* dargestellten Zone.

Diese Richtung erhält man aber einfach. Man zieht den Durchmesser *AB* durch die beiden Schnittpunkte von *G* mit dem Grundkreis (*A* und *B*) und errichtet darauf die Senkrechte *N*, welche dann die projizierte Richtung darstellt.

Diese Aufgabe wird uns instand setzen, auf einfache Weise aus einer stereographischen Projektion eines Kristalles ein orthogonales Kristallbild abzuleiten.

Anhang: Beziehungen zwischen den Elementen der Kreise auf der Kugeloberfläche und ihren Elementen in stereographischer Projektion.

a) Neigung, Lage des Mittelpunktes und Radiengröße eines Großkreises (Fig. 24).

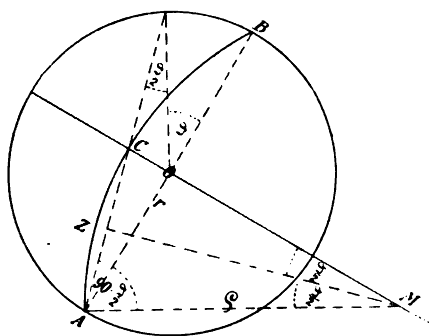


Fig. 24.

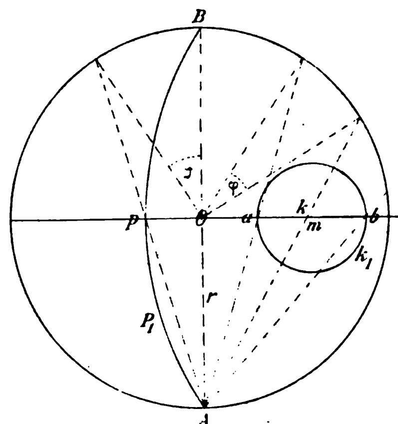


Fig. 25.

Fig. 24 ist eine stereographische Projektion mit einem größten Kreis *Z*; seine Neigung gegen die vertikale Zone *AOB* ist $OC = \vartheta$; sein Mittelpunkt sei *M*, der Radius ϱ. Man kann ableiten, daß $\sphericalangle CAM = 90 - \frac{\vartheta}{2}$. Damit erhält man leicht zu einem durch seine Neigung gegebenen Großkreis den Mittelpunkt.

Ferner sei $CM (= AM) = \varrho$ und $OA = r$. Dann folgt aus Dreieck *OAM*

$$\varrho = \frac{r}{\sin \vartheta}.$$

In manchen Fällen (z. B. $r = 10$ cm) ist die ebenfalls leicht sich ergebende Formel

$$\varrho = r\left(\operatorname{cotg}\vartheta + \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right)$$

bequemer.

b) Die entsprechenden Beziehungen bei einem Kleinkreis (Fig. 25).

In der stereographischen Projektion der Fig. 25 ist ein Kleinkreis k_1 eingezeichnet; k ist die Projektion seines Mittelpunktes auf der Kugeloberfläche; m ist der Mittelpunkt des ebenen Kreises; P_1 der Polkreis zu k, r sei der Radius des Grundkreises. Es ergeben sich folgende Beziehungen:

α) Entfernung Ok. Die Ebenen von k_1 und P_1 sind parallel; ihre Neigung gegen die vertikale Zone AOB ist ϑ. $\sphericalangle pAk = 45°$; $\sphericalangle pAO = \frac{\vartheta}{2}$; also $\sphericalangle OAk = 45° - \frac{\vartheta}{2}$; also

$$Ok = r\operatorname{tg}\left(45° - \frac{\vartheta}{2}\right).$$

β) Radiengröße des Kleinkreises. Der Winkelradius des Kleinkreises sei φ. Dann ist $\sphericalangle aAk = \sphericalangle kAb = \frac{\varphi}{2}$ und $\sphericalangle OAa = 45 - \frac{\vartheta+\varphi}{2}$ und $\sphericalangle OAb = 45° - \frac{\vartheta-\varphi}{2}$. Ferner sei $am = bm = \varrho$. Also

$$2\varrho = Ob - Oa = r\operatorname{tg}\left(45° - \frac{\vartheta-\varphi}{2}\right) - r\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\vartheta+\varphi}{2}\right) =$$

$$= r\cdot\frac{\sin\left(45° - \frac{\vartheta}{2} + \frac{\varphi}{2} - 45° + \frac{\vartheta}{2} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{1}{2}\cos\left[45° - \frac{\vartheta}{2} + \frac{\varphi}{2} - 45° + \frac{\vartheta}{2} + \frac{\varphi}{2}\right] + \frac{1}{2}\cos\left[45° - \frac{\vartheta}{2} + \frac{\varphi}{2} + 45° - \frac{\vartheta}{2} - \frac{\varphi}{2}\right]},$$

$$\varrho = \frac{r\sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\vartheta}.$$

γ) Entfernung Om.

$$Om = \frac{Ob}{2} - \frac{Oa}{2} + Oa = \frac{Ob}{2} + \frac{Oa}{2} =$$

$$= \frac{r}{2}\cdot\operatorname{tg}\left(45° - \frac{\vartheta-\varphi}{2}\right) + \frac{r}{2}\operatorname{tg}\left(45° - \frac{\vartheta+\varphi}{2}\right) =$$

$$= \frac{r\cdot\sin\left[45° - \frac{\vartheta}{2} + \frac{\varphi}{2} + 45° - \frac{\vartheta}{2} - \frac{\varphi}{2}\right]}{\cos\varphi + \sin\vartheta} = \frac{r\cdot\cos\vartheta}{\cos\varphi + \sin\vartheta}.$$

Spezielle Fälle ergeben sich für $\vartheta = 0$ (Kleinkreis um einen Flächenpol auf dem Grundkreis), nämlich $\varrho = r\operatorname{tg}\varphi$ oder für $\varphi = 90°$ (Großkreis), nämlich $\varrho = \frac{r}{\sin\vartheta}$.

Die praktischen Methoden der stereographischen Projektion.

Die rein geometrische Ausführung einer stereographischen Projektion gestaltet sich wegen der vielen nötigen Hilfskonstruktionen meist ziemlich umständlich; ähnliches gilt für die Messung von Winkeln an einer ausgeführten Projektion. Die Einführung besonderer Hilfsmittel hat aber die Konstruktionen wesentlich vereinfacht, so daß man darnach rasch und mit großer Genauigkeit die stereographischen Aufgaben mit graphischen Methoden lösen kann. Die besonderen Hilfsmittel sind der stereographische Transporteur und insbesondere das stereographische Netz.

Der stereographische Transporteur. Wir konnten jede Winkelabtragung und jede Winkelmessung durch Übergang zum Grundkreis ausführen. Für einen bestimmten Grundkreisradius ist aber auch die lineare Entfernung zweier Punkte auf einem Durchmesser eine ganz bestimmte, abhängig von der Entfernung des einen Punktes vom Kreismittelpunkt. Es sind sonach alle Messungen auch auf jedem Durchmesser auszuführen. Man könnte also für einen bestimmten Radius eine geradlinige Skala mit einer Einteilung, welche den fraglichen Winkelabständen entspricht, benutzen. Ein solches Instrument nennt man einen stereographischen Transporteur. Die auf einem solchen beruhenden vereinfachten Zeichnungsmethoden sind im Folgenden nur kurz beschrieben.

Stereographischer Transporteur nach Hutchinson[1] (Fig. 26).

Als zweckmäßige Größe des Radius des Grundkreises wurde hier 6,35 cm gewählt oder auch 10 cm, wenn man größere Genauigkeit erzielen will. Zu jedem der beiden Radien ist also der entsprechende Transporteur zu konstruieren.

Der aus Buxbaumholz gefertigte Transporteur (Fig. 26) stellt einen Streifen dar, dessen Breite, also vielleicht 10 cm, genau gleich dem Grundkreisradius ist. Eine der beiden Kanten mit der Skala wird zum Abtragen

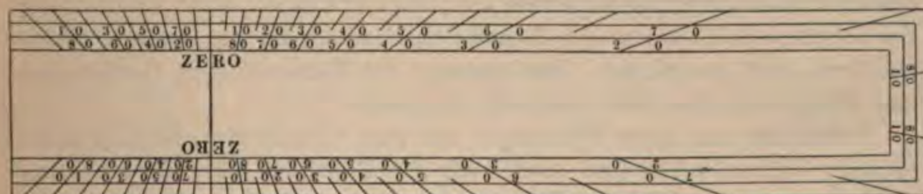


Fig. 26. Stereographischer Transporteur nach Hutchinson.

von Winkelabständen auf einem Durchmesser benutzt. Die untere Zifferreihe links von der Nullinie gestattet, auf einem Durchmesser direkt einen Winkelabstand vom Grundkreismittelpunkt oder als Differenz zweier solcher Abstände die Winkel zwischen zwei Punkten des Durchmessers überhaupt

[1]) Zeitschr. f. Krystallographie. 1909. 46, 225.

zu messen. Dasselbe kann man mit der oberen Ziffernreihe rechts von der Nullinie (gewöhnliche Gradteilung) erreichen, wobei der wahre Winkelabstand gleich dem doppelten Wert der zugehörigen Skalenziffer ist; im letzteren Falle liefert also z. B. der Skalenteil 10 den Abstand 20° vom Mittelpunkt.

Die rechte Seite dient in erster Linie zum Abtragen von Winkelabständen außerhalb des Grundkreises. Die Skalen rechts ermöglichen direkt die Bestimmung des Abstandes eines Großkreismittelpunktes vom Mittelpunkt des Grundkreises. Es sei z. B. ein Großkreis G_1 (Fig. 27) mit der Neigung 20° gegen den Grundkreis gegeben. Man ziehe den dazu senkrechten Durchmesser D_1 und lege den Transporteur mit der Nullinie durch den Grundkreismittelpunkt an, so daß also Skalenteil 20 links der oberen Ziffernreihe = 70 der unteren Reihe am Schnittpunkt C von G_1 mit D_1 liegt. Bei Teilstrich 20 der oberen Ziffernreihe rechts liegt dann der Mittelpunkt M dieses Großkreises (nach S. 17).

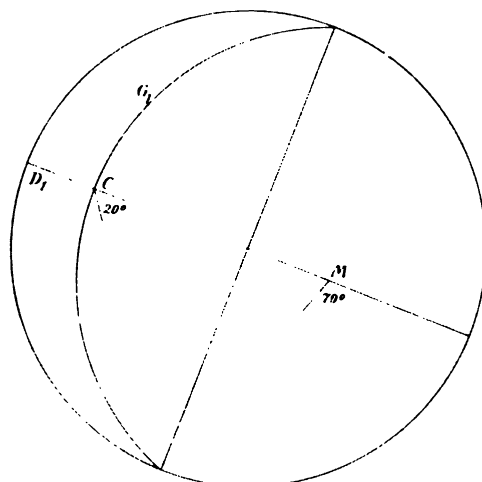


Fig. 27.

Den Radius eines Kleinkreises um einen Punkt p auf einem Durchmesser erhält man, indem man von p aus nach beiden Seiten die gleichen Winkelabstände φ anträgt. Die lineare Differenz auf der Skala ist der Durchmesser des Kleinkreises.

Mit Hilfe dieses Transporteurs lassen sich mit einem ziemlichen Grade von Genauigkeit alle jene Aufgaben lösen[1]), bei welchen es sich um eine direkte Winkelabtragung auf einem Durchmesser handelt, also: Bestimmung des Gegenpoles zu einem gegebenen Pol, Bestimmung des Poles zu einem Großkreis und umgekehrt, Bestimmung der Elemente von Großkreisen und Kleinkreisen für eine bestimmte Elevation.

Kleinkreise um einen Flächenpol auf dem Grundkreise, besonders bei großem Radius, konstruiert man nach den Prinzipien der Fig. 18. Man macht $Pa = \varphi$ mit Hilfe des Transporteurs und erhält dann $Pb = Pa = \varphi$, wenn man die Gerade Ba zieht und verlängert.

Die weiteren Aufgaben, welche den Abstand zweier Flächenpole P_1 und P_2 auf einem Großkreis betreffen, kann man ebenfalls auf Messung an einem Durchmesser zurückführen (Fig. 28). Man suche den Pol P zum

1) Auf die Verbindung mit weiteren Hilfsmitteln (Netz und Transporteur auf Celluloid) sei hier nur hingewiesen.

Großkreis, auf welchem die beiden Flächenpole P_1 und P_2 liegen. Nach Grundaufgabe 3 (Seite 10) erhält man auf dem Grundkreis den wahren Abstand $P_1'P_2'$. Man ziehe den Durchmesser $P_1'O$, senkrecht dazu OA und verbinde A mit P_2'. Den Abstand $P_1'P_2''$ kann man mit dem Transporteur messen.

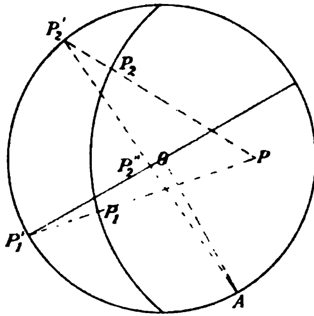


Fig. 28.

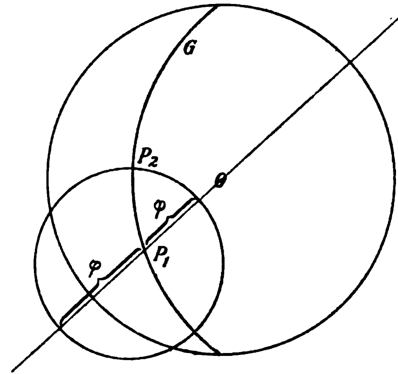


Fig. 29.

Soll man auf einem Großkreis G mit dem Flächenpol P_1 im Abstand φ einen weiteren Pol eintragen, dann zieht man (Fig. 29) den Durchmesser $P_1 O$ und konstruiert zu P_1 den Kleinkreis mit dem Winkelradius φ dessen Durchschnitt mit G den gesuchten Flächenpol P_2 liefert.

Die Abtragung und Messung von Winkeln auf dem Grundkreis selbst erfolgt wohl zweckmäßig auch direkt mit Hilfe eines gewöhnlichen Transporteurs.

Stereographischer Transporteur (Nr. I) **nach Penfield** (Fig. 30).

Einen ähnlichen Transporteur zur Zeichnung einer stereographischen Projektion zeigt Fig. 30. Er besitzt einerseits eine Teilung, wie ein ge-

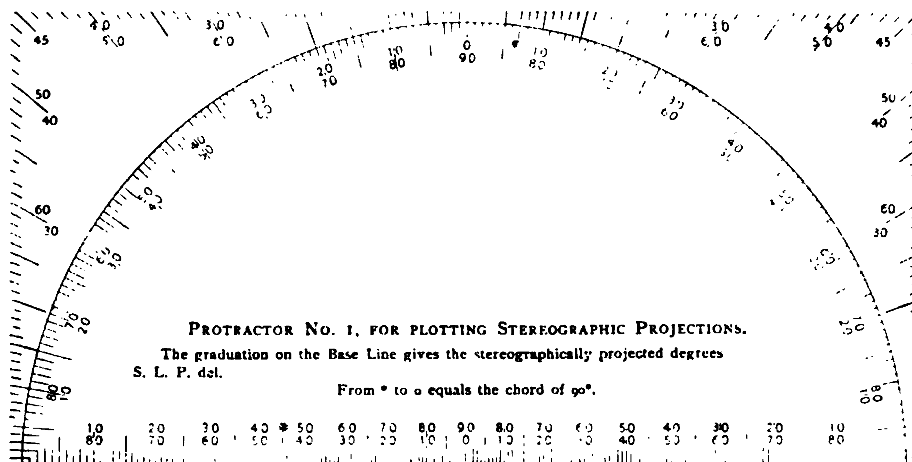


Fig. 30. Geteilter Grundkreis und stereographischer Transporteur (Nr. I) nach Penfield.

wöhnlicher Transporteur, andrerseits auf seiner Grundlinie eine stereographische Gradeinteilung, entsprechend einem Grundkreisradius von 7 cm.

Mit der Skala auf der Grundlinie führt man alle Winkelabtragungen auf Durchmessern innerhalb des Grundkreises aus, wie mit dem Transporteur nach Hutchinson. Die Grundlinie wird dabei an den Durchmesser angelegt, mit dem 0 — 90°-Punkt im Mittelpunkt des Grundkreises. Der 0 — 90°-Punkt auf der Peripherie des gewöhnlichen Transporteurs ist dabei immer vom Zeichnenden weggewendet (Fig. 31).

Kommt ein Punkt außerhalb des Grundkreises zu liegen, dann benutzt man entweder noch eine besondere Skala oder einfacher, aber vielleicht nicht ganz so genau, beide Teilungen auf dem Transporteur. Es sei z. B. (Fig. 31) auf dem Durchmesser PO (Abstand $PO = 50°$) ein Punkt abzutragen, welcher 60° von P entfernt liegt. Man ziehe Durchmesser PO und den dazu senkrechten Durchmesser. Den Transporteur lege man mit der Grundlinie an PO mit dem Punkt $\binom{90}{0}$ in O. Der Punkt $\binom{0}{90}$ der gewöhnlichen Transporteurteilung liegt auf der Peripherie bei A. Man trage von P aus auf der Grundlinie zunächst 40° bis C ab, dann gehe man auf der Peripherie weiter von C bis D und zwar um 20° (Messung mit dem gewöhnlichen Transporteur) und ziehe die Gerade AD, dann erhält man Punkt E, welcher um 60° von P entfernt ist.

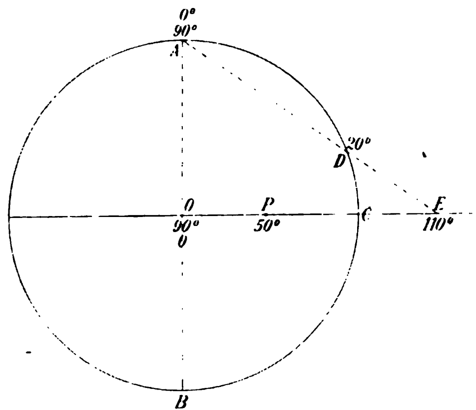


Fig. 31.

Die Messung des Winkels zwischen zwei gegebenen Polen auf einem Großkreis kann mit dem gleichen Transporteur erfolgen, nach Übertragung auf den Grundkreis (Grundaufgabe 3). Die Messung auf dem Grundkreis erfolgt natürlich mit dem gewöhnlichen Transporteurteil[1]). Die Konstruktion eines Großkreises durch zwei Pole erfolgt in vielen Fällen nach Grundaufgabe 6, Lösung *b* (Seite 11), besonders wenn man den Großkreis selbst nicht braucht, sondern nur den dazu senkrechten Durchmesser, wie bei unserer Winkelmessung. Auch ermittelt man nur den Pol des gesuchten Großkreises allein, wie am Schluß bei Grundaufgabe 6 angegeben ist.

1) Penfield benutzte bei Messungen an einer fertigen Projektion (Auflösung von Dreiecken) ein besonderes stereographisches Netz auf durchsichtigem Celluloid mit entsprechendem Grundkreisradius. Dessen Anwendung, welche übrigens in vielen Fällen, besonders wenn man einen geteilten Grundkreis bei der Konstruktion benutzt, durch eine einfache Konstruktion zu ersetzen ist, wird sich bei den Erörterungen über das Wulffsche Netz ergeben.

Die Konstruktionen führt man zweckmäßig auf eigenen Blättern aus, welche den geteilten Grundkreis bereits aufgedruckt enthalten. Diesen Blättern sind gleichzeitig Skalen aufgedruckt, welche insbesondere die Radien von Großkreisen und jene von Kleinkreisen um Punkte auf der Peripherie des Grundkreises Kleinkreisen direkt abzutragen gestatten. Die Radien von Großkreisen sind angegeben für eine bestimmte Neigung des Großkreises gegenüber dem Grundkreis. Diese Skalen bedeuten eine weitere Vereinfachung der Konstruktionen. Doch ist die Ermittelung dieser Radien selbst unter Hinzuziehung des geteilten Grundkreises nach obigem einfach.

Denn nach Fig. 24 ist der Radius eines Großkreises mit der Neigung ϑ bestimmt durch den Winkel $90 - \frac{\vartheta}{2}$, welchen man mit Hilfe des Transporteurs ebenso abtragen kann wie jeden anderen Winkel. Nur ist zu berücksichtigen, daß am Transporteur der Winkel $180 - \vartheta$ abzulesen ist.

Für einen projizierten Kleinkreis um einen Flächenpol P auf der Peripherie des Grundkreises ist der Radius nach Seite 18 $\varrho = r \operatorname{tg} \varphi$. Er wird also einfach erhalten durch Abtragen von 2φ auf einem Durchmesser mit Hilfe des Transporteurs, wie Fig. 32 zeigt.

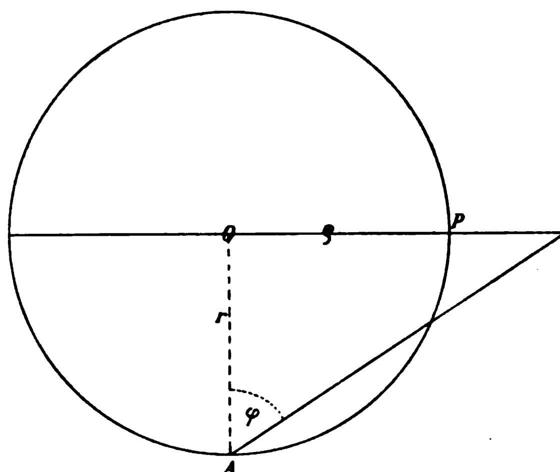


Fig. 32.

Bei allzugroßen Radien sehr flacher Kreise verzichtet man überhaupt auf die Ermittlung der Größe, bzw. auf die Konstruktion mit dem Zirkel.

Für einen Grundkreisradius von 10 cm sind die Radienlängen entsprechend den Formeln auch direkt einer Tabelle der natürlichen trigonometrischen Zahlen zu entnehmen (Formeln Seite 18). Nach Multiplikation mit 10 ergeben sich die Längen in Zentimetern.

Bei Benutzung eines Grundkreises mit vorgedruckter Gradteilung (Fig. 33) ist selbst der Transporteur im Notfall entbehrlich und kann durch ganz einfache Konstruktionen ersetzt werden; die insgesamt nötig werdenden Konstruktionen gestatten immerhin eine noch verhältnismäßig einfache Ausführung der Darstellung eines Flächenkomplexes[1]).

1) Penfield, Zeitschr. f. Krystallographie. 1902, **35**, 1. — Wulff, ebenda 1892, **21**, 253. — Fedorow, ebenda 1893, **21**, 618.

Die Ausführung einer stereographischen Projektion mit Hilfe eines Transporteurs.

Fürs erste ist hierbei nur bestes Zeichenmaterial zu verwenden, gutes, nicht zu dünnes Papier, harte, meißelartig scharf zugespitzte Bleistifte und ein guter Zirkel; besonders für Kreise mit großem Radius ist ein Stangenzirkel mit Millimeterteilung zur Erreichung größter Genauigkeit nötig. Für noch flachere Kreise benutzt man ein Kreislineal, wie solche mehrfach in

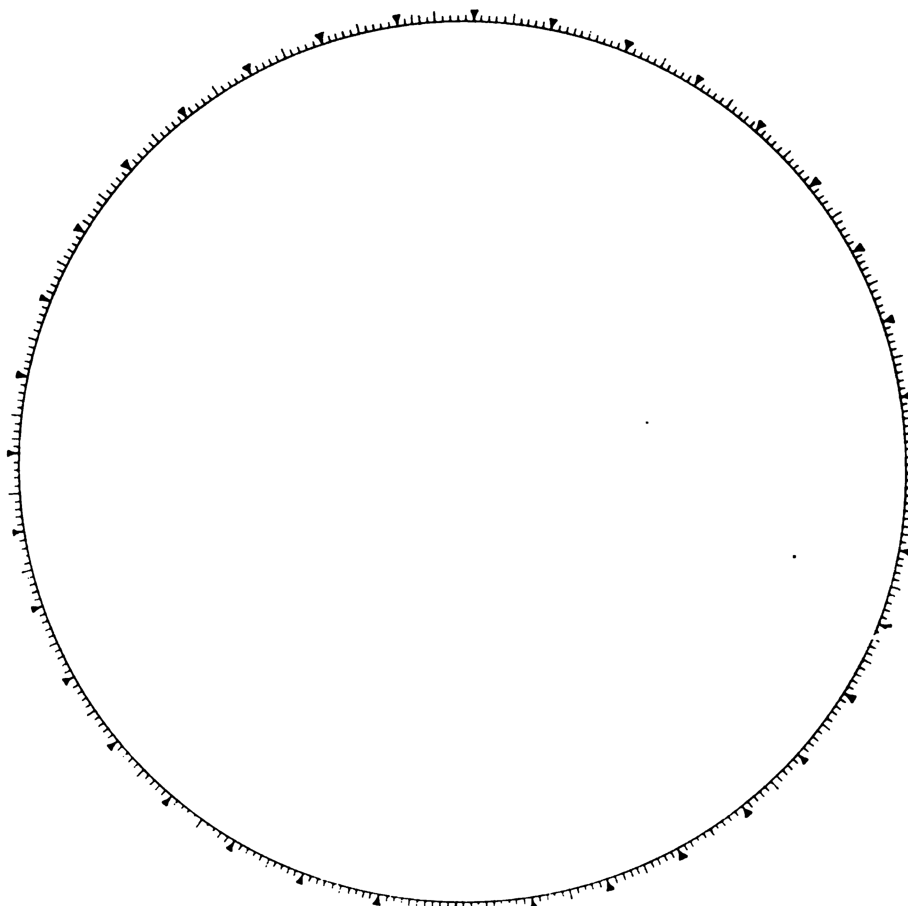


Fig. 33.

Vorschlag gebracht wurden. Ein solches Lineal kann man sich selbst anfertigen lassen aus Streifen kräftigen und elastischen Holzes.

Die Transporteure sollen am besten für einen Grundkreisradius von 10 cm konstruiert sein. Dann legt man bei der Zeichnung immer einen entsprechenden Grundkreis zugrunde, wenn man nicht gleich Blätter mit aufgezeichnetem, geteiltem Grundkreis benutzt, was eine ganz bedeutende Vereinfachung der Zeichnung bedingt.

Der Radius von 10 cm wurde gewählt, einmal weil diese Dimension eine große Genauigkeit erlaubt und insbesondere deswegen, weil hierbei nach den obigen Formeln die zu zeichnenden Kreise sich auf die einfachste Weise ergeben, ohne daß eine längere Rechnung oder eigene Skalen nötig wären.

Anm. Unter Benutzung eines geteilten Grundkreises mit einem Radius von 10 cm lassen sich sogar die beiden Transporteure unter Berücksichtigung der angeführten Formeln durch ein einfaches Lineal mit Millimeterteilung ersetzen und die Konstruktionen verlieren nicht sehr an Einfachheit. Es ergibt sich auch noch der gerade Abstand a eines beliebigen Punktes vom Mittelpunkte des Grundkreises als $a = 10 \times \operatorname{tg} \varphi$, wobei φ der Winkelabstand ist; $\operatorname{tg} \varphi$ entnimmt man wiederum einer Tabelle der natürlichen trigonometrischen Zahlen.

Stereographisches Netz nach G. Wulff (Tafel I).

Stereographische Netze wurden für die Lösung einschlägiger Aufgaben mehrfach benutzt. So hat v. Fedorow ein solches Netz konstruiert. Penfield benutzte ein stereographisches Netz auf Zelluloid, um die Winkel zwischen Flächenpolen auf einer Projektion rasch und genau messen zu können. Wir haben auf dieses Netz bei der Behandlung seines Verfahrens verzichtet, einerseits weil die Übertragung auf den Grundkreis auch nicht viel länger sich gestaltet, zumal der hierfür erforderliche Pol des zugehörigen Großkreises schon bei der Konstruktion sich ergibt und anderseits, weil wir bei Benutzung des gleichen Grundkreisradius von 10 cm nötigenfalls unter Zuhilfenahme eines Dreispitzzirkels die Messungen auch an dem jetzt zu beschreibenden Wulffschen Netz ausführen können. Dieses hat sich vor allen anderen graphischen Hilfsmitteln in der Kristallberechnung und -zeichnung eingebürgert.

Prinzip. Wir gehen aus von der Darstellung der Flächenpole auf der Kugeloberfläche. Die Lage irgendeines Punktes auf der Kugeloberfläche kann man durch zwei Systeme von Kreisen bestimmen. Wir denken uns durch zwei gegenüberliegende Punkte, vorn und rückwärts, auf der festliegend gedachten horizontalen Ebene durch den Kugelmittelpunkt, Großkreise gezogen, etwa so daß ihre Ebene immer zwei Grad einschließen. Dann sind solche Großkreise nach der Art der Meridiane auf der Erdoberfläche angeordnet. Die Meridiane schneiden sich in den beiden Hauptpolen; senkrecht zum Durchmesser der Kugel durch die beiden Pole steht ein besonderer Großkreis, der Äquator. Irgendein Punkt liegt nun zunächst auf einem solchen Meridian, welcher in seiner Lage wieder bestimmt ist durch die Neigung gegenüber dem festen horizontalen Grundkreis. Diese Neigung wird in Graden auf dem Äquator gemessen. Um die beiden Pole, in welchen sich die sämtlichen Meridiane schneiden, beschreiben wir eine Anzahl von Kleinkreisen (Breitekreise), etwa im Abstand von zwei Graden.

Mit Hilfe eines solchen Kleinkreises kann man nun endgültig den eben angenommenen Punkt bestimmen, indem man außer seinem Meridian noch seinen Abstand von einem der beiden Hauptpole angibt.

Nun denken wir uns also eine Kugel mit einem Netz solcher Kreise überzogen. Wir legen ferner eine unveränderlich bleibende horizontale Ebene zugrunde; die Kugel sei nur drehbar um den Durchmesser senkrecht zur horizontalen Ebene. Dann legen wir die (durchsichtig gedachte) Oberfläche einer gleichen Kugel ohne aufgezeichnete Kreise genau auf die Oberfläche unserer Kugel mit Netz. Die Mittelpunkte fallen also bei einer gegenseitigen Verschiebung der beiden Oberflächen immer zusammen. Auch für die zweite Kugel behalten wir die gleiche feststehende horizontale Ebene. Die zweite Kugel sei ebenfalls nur drehbar um den Durchmesser senkrecht zu dieser festliegenden Horizontalen. Im folgenden denken wir uns die Kugel mit der netzartigen Oberfläche überhaupt in unveränderte Lage mit ihrer bestimmten horizontalen Ebene und den beiden Polen nach vorn und rückwärts.

Durch alleinige Drehung der zweiten Kugel um den Durchmesser, senkrecht zur horizontalen festliegenden Ebene kann man jede erforderliche Konstruktion ausführen. Man kann jeden beliebigen Großkreis ziehen, durch einfaches Drehen der zweiten Kugel, bis die gesuchte Lage (etwa gegeben durch die Neigung gegen die Horizontalebene) zusammenfällt mit dem entsprechenden Großkreis auf der Netzoberfläche, welchen man dann einfach nachzuzeichnen hat. Jeder solcher Großkreis schneidet den Kreis der horizontalen Ebene in zwei Punkten. Den Abstand eines Punktes auf einem so gefundenen Großkreis vom Schnittpunkt mit dem horizontalen Kreis erhält man ebenfalls leicht. Man dreht wieder um den Durchmesser, welcher ständig als Axe dient, bis der Schnittpunkt mit einem der Pole zusammenfällt; dann erhält man den gesuchten Abstand durch Abzählen der Kleinkreise auf der Netzkugel. Den Abstand zweier Punkte auf einem Großkreis erhält man auf ähnliche Weise als Differenz zweier solcher Ablesungen oder noch einfacher durch Abzählen der Kleinkreise zwischen den beiden Punkten. Natürlich kann man auch jeden Kleinkreis um einen Punkt auf den horizontalen Großkreis zeichnen. Man bringt diesen Punkt durch Drehen mit einem der Pole der Netzkugel zusammen und führt auf der zweiten Oberfläche den gewünschten Kleinkreis nach.

Statt nun die gesamten Konstruktionen auf der Oberfläche zweier Kugeln durchzuführen, — was rein technisch schon nicht zu erreichen wäre —, geht man über zur stereographischen Projektion. Man projiziert die Oberfläche mit den aufgezeichneten Kreisen als einheitliches System auf die festliegende horizontale Ebene und erhält so ein stereographisches Netz. Wir verwenden im folgenden die von G. Wulff eingeführte Form, das sog. Wulffsche Netz (Tafel I).

Dieses Netz hat einen Grundkreis mit einem Radius von 10 cm. Der Grundkreis ist in gleiche Teile geteilt; jeder derselben mißt zwei Grad.

Zwei gegenüberliegende Punkte (0° und 180°) liefern die beiden Hauptpole, durch welche ein System von Großkreisen (Meridiane) in stereographischer Projektion gelegt ist. Der Abstand zweier nächster Großkreise beträgt zwei Grad, gemessen auf dem geraden Durchmesser (Äquator) senkrecht zur Verbindungslinie (Poldurchmesser) der beiden Pole. Diese Meridiane entsprechen dem oben genannten System von Großkreisen auf der Kugeloberfläche; sie gestatten also ganz die gleiche Verwendung. Die Kleinkreise um die beiden Pole sind ebenfalls im Abstand von zwei Graden gezeichnet. Stärker ausgezogen sind jeweils die Großkreise, welche den Abständen 10°, 20° usw. vom Grundkreis entsprechen, ferner die Kleinkreise mit den Radien 10°, 20° usw. Anstelle der zweiten, vorher gedachten Kugel benutzt man ein Blatt durchsichtigen Papiers, welches über dem stereographischen Netz gedreht wird mit gemeinsamem Mittelpunkt beider Grundkreise. Drehungsachse ist also wieder die Normale zur horizontalen Ebene. Mit einer Nadel durch den Mittelpunkt kann man beide Papiere gegenseitig festlegen, so daß nur die eine erforderliche Drehung um die gemeinsame Vertikale ausgeführt werden kann, ohne sonstige Verschiebung.

Die Grundaufgaben. Mit Hilfe dieses stereographischen Netzes kann man nun auf die einfachste Weise alle bei der stereographischen Projektion vorkommenden Grundaufgaben (Seite 10 ff.) lösen, wie im folgenden kurz erläutert sei. Das durchsichtige Papier ist dabei durch eine Nadel im Mittelpunkt des Netzes drehbar befestigt:

1. Um den Pol zu einem gegebenen Großkreis in der Zeichnung zu erhalten, dreht man das Zeichnungspapier, bis der Großkreis über einem solchen des Netzes erscheint. Vom Schnittpunkt mit dem Äquator aus zählt man 90° mit Hilfe der Teilung auf dem Netz ab; den erhaltenen Punkt, den gesuchten Pol markiert man auf der Zeichnung.

2. Zu einem Pol P erhält man den Großkreis auf umgekehrte Weise. Man bringt P auf den Äquator und zählt nun umgekehrt auf dem Äquator bis zum Schnittpunkt mit dem gesuchten Großkreis des Netzes. Diesen führt man nötigenfalls auf dem Zeichnungspapier nach.

3. und 4. Den Winkel zwischen zwei Flächenpolen auf einem Großkreis erhält man auf folgende Weise: Man bringt durch Drehung den Großkreis auf der Zeichnung zur Deckung mit dem entsprechenden Großkreis des Netzes und mißt den Abstand beider Punkte an der Zahl der dazwischen liegenden Kleinkreise, welche den Großkreis des Netzes schneiden.

6. Den Großkreis durch zwei gegebene Flächenpole erhält man, indem man das Zeichnungspapier dreht, bis die beiden Punkte über demselben Großkreis des Netzes erscheinen. Den Kreis zeichnet man nötigenfalls ein.

7. Den Winkel α zwischen zwei Großkreisen mißt man auf folgende Weise: Man sucht auf jedem der beiden den um 90° vom Schnittpunkt entfernten Punkt (nach 4) und mißt dann nach 3 den Winkel zwischen den

beiden so erhaltenen Punkten. Man erhält auf diese Weise entweder α oder $180 - \alpha$.

Auch auf dem polaren Kreis zum Schnittpunkt (nach 2) kann man einfach nach 3 den gesuchten Winkel messen.

8. Soll man durch einen Flächenpol P auf einem Großkreis der Zeichnung einen zweiten Großkreis unter bestimmter Neigung gegen den ersten Kreis ziehen, dann sucht man zu dem fraglichen Pol P nach 2 zuerst den polaren Kreis, diesen selbst braucht man nicht auszuziehen. Man trägt nur vom Schnittpunkt mit dem gegebenen Großkreis aus durch Abzählen der Kleinkreise des Netzes einen Punkt darauf im Abstand des verlangten Winkels ab. Nach 6 zieht man alsdann durch den gefundenen und den gegebenen Flächenpol den gesuchten Großkreis.

9. Um einen Flächenpol auf der Peripherie des Grundkreises erhält man einen Kleinkreis mit bestimmtem Radius φ dadurch, daß man den Pol durch Drehen der Zeichnung mit einem der beiden Hauptpole des Grundkreises zur Deckung bringt und nun den Kleinkreis des Netzes mit zugehörigem Radius aufsucht und soweit als nötig nachfährt.

Braucht man einmal einen Kleinkreis um einen Pol P innerhalb des Grundkreises, dann drehe man die Zeichnung mit dem Pol, bis er auf den Äquator des Netzes fällt. Auf diesem Durchmesser erhält man dann im Abstand φ von P zwei Punkte, deren gerader Abstand den Durchmesser des gesuchten Kleinkreises darstellt. Diesen selbst zeichnet man dann am besten mit einem Zirkel.

Kommt der Kleinkreis nicht ganz innerhalb des Grundkreises zu liegen, dann liefert der Äquator und der Meridian durch P drei Punkte zur Bestimmung des gesuchten Kleinkreises (Fig. 17).

10. Die Konstruktion und Auflösung sphärischer Dreiecke besteht nur einfach in einer fortgesetzten Anwendung der Grundaufgaben 1—9, nachdem bereits (Seite 13) darauf hingewiesen wurde, daß die Konstruktion und Auflösung ganz analog einem ebenen Dreieck erfolgt.

11. Transformation der stereographischen Projektion. Man zeichne den irgendwie bestimmten Pol P der neuen Projektionsebene ein und drehe die Zeichnung, bis P über dem Äquator des Netzes erscheint. Dann suche und zeichne man zu P den polaren Kreis (Hilfskreis X, Fig. 21). Dieser liefert mit den zu transformierenden Zonen die Schnittpunkte $x_1, x_2, x_3 \ldots$. Die Schnittpunkte der Zonen mit dem Äquator $y_1, y_2, y_3 \ldots$ werden ebenfalls angedeutet. In der nunmehrigen Lage der Zeichnung erhält man auf der Peripherie der Grundkreise direkt die transformierten Punkte $x_1', x_2', x_3' \ldots$ indem x_1 und x_1', ebenso x_2 und x_2' usw. über dem gleichen Kleinkreise des Netzes liegen. Ebenso erhält man die transformierten Punkte $y_1', y_2' \ldots$ auf dem Äquator (bzw. nötigenfalls den zugehörigen Gegenpol), indem man von $y_1, y_2 \ldots$ auf den Äquator jeweils um den direkt zu messenden Winkelabstand P vom Mittelpunkt des Netzes weitergeht in der Richtung, nach welcher hin die Drehung erfolgt.

Man hat für jede Zone zwei Punkte nach der Transformation, x_1' und y_1', oder x_2' und y_2' usw. und kann nötigenfalls durch die beiden Punkte nach 6 den Großkreis ziehen.

Sehr einfach gestaltet sich auch der spezielle Fall der Transformation (Fig. 22), zu einem Pol P_1 den in bezug auf eine Umdrehungsachse P dazu symmetrisch liegenden Pol P_1' zu finden (Pol P_1 und der zugehörige Pol P_1' in Zwillingsstellung). Man drehe die Zeichnung über dem Netz, bis P_1 und P über einem Großkreis erscheinen und erhält nun P_1' mit Hilfe des Systemes der Kleinkreise, indem man Abstand P_1P = Abstand PP_1' (in Graden) macht.

Zu zeichnen sind natürlich nur wieder jene Großkreise, welche man aus irgendeinem Grunde braucht. Für die Auffindung der Pole in symmetrischer Stellung (Zwillingsstellung) ist die eigentliche Zeichnung von Kreisen selbst überflüssig.

Bemerkungen über die Anwendung auf Kristalle. Die Vollständigkeit, bis zu welcher man bei der Ausführung einer stereographischen Projektion geht, hängt von den Zwecken, derenthalben man die Projektion ausführt, ab.

In vielen Fällen ist einfache Einzeichnung der Pole auf Grund der Winkel ohne besondere Hilfskonstruktionen möglich und es reicht auch die Eintragung der Pole aus, ohne daß Großkreise in besonderem Umfange nachzuzeichnen wären. Dies ist insbesondere der Fall, wenn man aus den Messungen die sämtlichen Pole einträgt, um die Elemente des Kristalles und die Indizes der Flächen und Formen auf Grund von irgendwelchen Beziehungen (insbesondere von Zonenbeziehungen) zu ermitteln. Mit Hilfe einer Nadel kann man die einzelnen Pole als feinste Durchstoßpunkte erhalten, welche man jeweils, um sie deutlicher hervorzuheben, mit einem kleinen Ring auszeichnet.

Zeichnet man die die Zonen darstellenden Großkreise auf dem Zeichnungspapier nach, dann hängt der Grad der Genauigkeit sehr von der Exaktheit der Zeichnung ab. Das Nachzeichnen erleichtert den Überblick über die Zonenbeziehungen. Ferner bestimmt man beim Einzeichnen einer Fläche mit gegebenen Indizes den Pol am einfachsten als Schnittpunkt zweier Großkreise (Zonen). Für die Ermittlung eines Poles reicht die Zeichnung eines Großkreises aus (ganz oder teilweise); der Schnittpunkt ergibt sich dann mit Hilfe des entsprechenden Großkreises auf dem Netz. Darum kann man bei der Berechnung des Winkels zwischen Flächen mit bekannten Indizes sich auf die eigentliche Zeichnung von verhältnismäßig wenig Kreisen beschränken: diese führt man dann um so exakter aus, um die Genauigkeit zu erhöhen. Die Kurven ziehe man nur in feinsten Linien. Einfaches Durchpausen genügt in vielen Fällen; doch kann man auch manchmal den Zirkel benutzen.

Bei der Transformation ist der Polkreis zur neuen Projektionsebene auch noch ganz als weiterer Großkreis (Hilfskreis X) einzuzeichnen.

Im allgemeinen schränkt man die eigentliche Zeichnung auf dem Pauspapier möglichst auf das einfache Abtragen der Pole ein, benutzt in

erster Linie nur das Netz mit seinen aufgezeichneten Kreisen, wenn man besonderes Gewicht auf die Genauigkeit legt. Für Messungen brauchen ja nur die Pole vorzuliegen, nicht aber ausgezogene Großkreise durch sie; diese ersetzen die Kreise auf dem Netze. Ausziehen von Kreisen ist nur beim Eintragen von Polen selbst bis zu einem gewissen Umfange nötig, wenn man in ausgiebigster Weise von den Zonenbeziehungen Gebrauch macht.

Will man also mit Hilfe einer stereographischen Projektion die Winkel zwischen den Flächenpolen eines Kristalles ermitteln, dann trägt man zunächst jene Flächen ein, welche die Fundamentalwinkel liefern, und zeichnet dann aus ihnen als Grundlage einzelne Hauptzonen möglichst genau ein. Die einzelnen Pole findet man dann meist vollständig auf diesen Großkreisen als Schnittpunkt mit Hilfe der Großkreise auf dem Netz, ohne daß diese selbst nachzuzeichnen wären.

Auch das Achsenverhältnis des Kristalles und die Parameter der Flächen (und daraus deren Indizes) kann man graphisch ermitteln aus der Konstruktion ebener Dreiecke. Hierzu benutzt man als eine Dreiecksseite den Durchmesser (Äquator) = 10 cm und dann noch die Teilung des Grundkreises zum einfachen Antragen der Dreieckswinkel. Auf den Äquator als Dreiecksseite beziehe man immer die b-Achse. Die zweite Achse sei ebenfalls die Dreieckseite durch den Mittelpunkt des Grundkreises. Auf diese Weise kann man aus dem Dreieck mit einem geteilten Lineal direkt das Verhältnis der Achsenabschnitte abmessen, wobei mit 10 zu dividieren ist. Beispiele hierzu s. weiter unten (Seite 70).

Umgekehrt kann man bei gegebenen Elementen des Kristalles für eine Fläche mit bekannten Indizes aus dem Dreiecke mit den Parametern als Seiten dessen Winkel messen und erhält so die Winkel zwischen wichtigeren Zonen. Diese Art der Konstruktion wendet man in erster Linie bei isolierten Flächen an, d. h. bei Flächen, welche nicht gerade durch die einfachsten Zonenbeziehungen bestimmt sind.

Ermittelung des Zwillingsgesetzes. Einfach gestaltet sich unter Benutzung graphischer Methoden der stereographischen Projektion die Ermittelung einer Zwillingsachse (Seite 16), wobei man auf verschiedene Weise verfahren kann.

Bei dem in Fig. 108 dargestellten Zwilling konnte man eine zu identifizierende Fläche $\underline{c}$ des zweiten Teilkristalles auf Grund zweier Winkelmessungen gegen Flächen des ersten Kristalles, etwa $\underline{c} : c = (\underline{00\bar{1}}) : (001)$ und $\underline{c} : b' = (\underline{00\bar{1}}) : (0\bar{1}0)$ in die stereographische Projektion des ersten Individuums eintragen. Ein Großkreis (in unserem Falle ein Durchmesser) durch c und $\underline{c}$ ergibt den Winkel $\underline{c} : c = (\underline{00\bar{1}}) : (001)$ zu $180^\circ - \pi$ und damit auch den Winkel $(\underline{001}) : (001) = \pi$. Die Zwillingsebene $(pq\bar{r})$ befindet sich zwar im unteren Teile des Kristalles, kommt also nicht innerhalb des Grundkreises zu liegen; doch ist für die Zwillingsachse P auf demselben Durchmesser $\frac{\pi}{2} = (00\bar{1}) : (pq\bar{r}) = (001) : (\overline{pq}r)$. Letzteres

Symbol kann man nun nach dem später zu beschreibenden Verfahren ermitteln.

Allgemein erscheint der Pol der Zwillingsachse als Schnittpunkt zweier Großkreise, bestimmt durch je eine von zwei identifizierten Flächen in Zwillingsstellung und die zugehörige Fläche des ersten Teilkristalles.

Sollte sich der auf diese Weise ermittelte Pol als irrational erweisen, dann existiert auch keine rationale Zwillingsebene. In diesem Falle ziehe man in der Projektion den polaren Großkreis zu diesem Pol. Er wird dann eine rationale Zone liefern, deren Achse die rationale Zwillingsachse darstellt.

Für die umgekehrte Eintragung von Zwillingsflächen nach einem bekannten Gesetz ist P (Seite 16 und 29, Fig. 22) entweder identisch mit dem Pol (oder Gegenpol) der rationalen Zwillingsebene oder erscheint als Polpunkt zum Zonenkreis der rationalen Zwillingsachse.

Vergleich der graphischen Methoden.

Nach dem Vorhergehenden unterscheiden wir zwei Arten graphischer Methoden der Kristallberechnung; bei der einen benutzen wir in erster Reihe als Hilfsmittel einen eigenen Transporteur, bei der letzteren ein stereographisches Netz. Beide Methoden haben Vorteile und Nachteile. Doch ist deren gegenseitiges Verhältnis so, daß dem stereographischen Netz ein ganz bedeutendes Übergewicht zukommt und seine Verwendung darum eine ungleich ausgedehntere ist.

Ein Transporteur, in Verbindung noch mit einem vorgezeichneten, geteilten Grundkreis, ermöglicht zwar auch eine rasche Ausführung der stereographischen Projektion eines Flächenkomplexes. Die Genauigkeit gewinnt, weil man immer gutes Papier verwendet, auf welches man dann eventuelle weitere zeichnerische Operationen mit größter Exaktheit durchführen kann. Die Anwendung eigentlicher Zeichnungsmittel (Zirkel, Kreislineal) bedingt weiterhin eine Steigerung der Genauigkeit und überhaupt eine gute Ausführung der gesamten Projektion, was ja wohl in manchen Fällen erwünscht sein kann. Die Fehler liegen im allgemeinen unter $\frac{1}{4}^{\circ}$. Diesen Vorzügen gegenüber steht der Nachteil eines immerhin etwas größeren Zeitaufwandes. Die Hilfskonstruktionen sind zwar vereinfacht und in ihrer Zahl verringert, die nicht zu umgehende Eintragung von Kreisen erfordert aber noch viele zeichnerische Operationen.

Bei der Anwendung des Netzes ist dagegen der Zeitaufwand auf ein Minimum reduziert. Die Genauigkeit ist vielleicht nur um weniges geringer wegen der Art der Ausführung der Zeichnung. Doch spielt diese Verringerung vielfach keine Rolle. Darum ist dem stereographischen Netz als dem einfachsten graphischen Hilfsmittel in jeder Hinsicht der Vorzug zu geben. Es soll bei jeder kristallographischen Untersuchung verwendet werden; es liefert nicht bloß eine wertvolle Kontrolle und Ergänzung jeder Rechnung, sondern ersetzt diese direkt in vielen Fällen.

Die Resultate der Messung, alle Winkel und Zonenbeziehungen, kann man mit einem geringsten Zeitaufwand zur einfachen Darstellung bringen und der weiteren Behandlung zugänglich machen. Alle Hilfskonstruktionen enthält jetzt das Netz und selbst das schließlich einzutragende Endresultat, die einzelnen Großkreise sind bereits auf dem Netz vorgezeichnet und können durch einfaches Durchpausen in die Zeichnung übertragen werden.

2. Gnomonische Projektion.

Prinzip und Haupteigenschaften. Bei der gnomonischen Projektion denkt man sich ebenfalls vorher die Pole und Zonen auf der Oberfläche einer Kugel dargestellt. Ihre Darstellung (Projektion) auf der Ebene erfolgt jedoch auf etwas andere Weise. Man denke sich eine horizontale Tangentialebene an die Kugeloberfläche in ihrem höchsten Punkte. Dieser Punkt O wird zum Projektionszentrum. Um dieses als Mittelpunkt zeichnet man in der Zeichnungsebene (Tangentialebene) einen Kreis (Grundkreis) mit dem Radius der Bezugskugel. Der Augpunkt fällt zusammen mit dem Kugelmittelpunkt M (Fig. 34). Projektionsrichtung für jeden Pol P (auf dem Vertikalkreis V) ist seine Verbindungsgerade mit diesem Punkt; diese Gerade trifft die Projektionsebene in einem Punkte A, welcher die

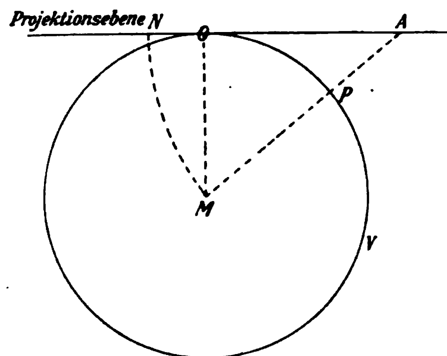


Fig. 34.

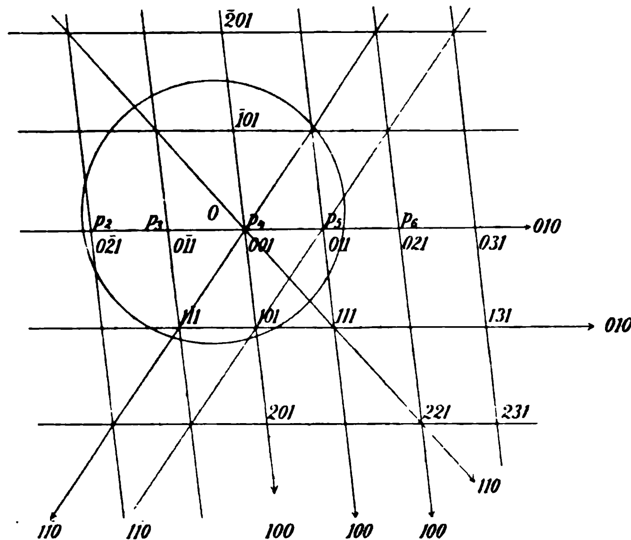


Fig. 35.

Projektion des Flächenpoles darstellt. Jede Fläche projiziert sich gnomonisch wieder als Punkt. Alle Punkte auf dem horizontalen Großkreis der Kugel liegen im Unendlichen. Dies bedingt einen Nachteil der gnomonischen Projektion, darin bestehend, daß die Punkte für steiler geneigte Flächen sehr weit vom Projektionszentrum entfernt zu liegen kommen.

Die Ebene, in welcher die Flächennormalen einer Zone liegen, schneidet die Projektionsebene in einer Geraden, auf welcher alle Pole der Zone liegen. Jede Zone erscheint also in gnomonischer Projektion als eine Gerade. Jede solche Projektion der Flächen und Zonen eines Kristalles erscheint also einfach als ein System von Geraden (Fig. 35) oder mit anderen Worten, die Großkreise auf der Kugeloberfläche (Zonen des Kristalles) projizieren sich gnomonisch als Gerade.

Ebenso ist ohne weiteres einzusehen, daß alle Zonen, deren Ebenen durch den gleichen horizontalen Durchmesser der Kugel gehen, auf der gnomonischen Projektion ein System von parallelen Geraden bilden. Die Richtung entspricht jener des gemeinsamen horizontalen Durchmessers.

Grundaufgaben der gnomonischen Projektion.

Messung von Winkeln zwischen Flächenpolen. Für die Lösung der Grundaufgaben ist folgende Überlegung von Bedeutung. In Fig. 34 stelle V einen vertikalen Großkreis der Kugel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius MO dar. Die Gerade OA sei der Durchschnitt mit der gnomonischen Projektionsebene. MA sei der Durchschnitt der Zone V mit einer zweiten zu V senkrechten Zonenebene. Denkt man sich durch A die Senkrechte zur Zeichnungsebene gezogen, dann stellt diese die gnomonische Projektion der zweiten Zonenebene Z (mit der Spur MA) dar. Durch Drehung um die Senkrechte durch A kann man die zweite Zonenebene in die gnomonische Projektionsebene umklappen. M fällt dabei nach $N(AM = AN)$. Bei dieser Umklappung behalten alle Strahlen durch M, also auch die Flächennormalen unserer Zone ihre gegenseitige Lage.

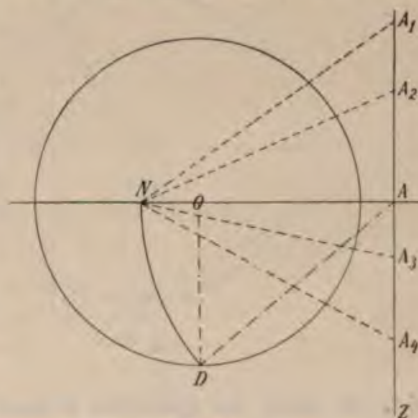


Fig. 36.

Fig. 36 stelle nun die gnomonische Projektionsebene mit dem Grundkreis dar. Einzelne Pole auf unserer Zone Z seien A_1, A_2, A_3 ... Man denke sich z. B. A_1 und A_3 mit dem Kugelmittelpunkt M (unter der Zeichnungsebene) verbunden; dann ist Winkel A_1MA_3 der Winkel zwischen den beiden Flächen A_1 und A_3; beim Umklappen in die gnomonische Projektionsebene bleibt dieser Winkel erhalten; $\measuredangle A_1NA_3$ ist

ebenfalls der wahre Winkel zwischen den beiden Flächenpolen A_1 und A_3; ferner sind ebenso $\measuredangle A_1NA_2$, A_2NA_3 usw. die wahren Winkel zwischen den entsprechenden Flächen A_1 und A_2, A_2 und A_3 usw.

Punkt N ist also ein Punkt, von dem aus man direkt die Winkel zwischen den Polen einer Zone A_1, A_2, A_3 ... messen kann. Man hat ihn den Winkelpunkt der Zone Z genannt.

Dieser Winkelpunkt ist auf folgende Weise bestimmt. Zunächst liegt er auf dem Durchmesser OA senkrecht zur Zonengeraden (A_1, A_2 ...). Ferner ist der Abstand NA bestimmt als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes mit der Kathete OA und der zweiten Kathete gleich dem Radius der Ausgangskugel oder dem Radius des Grundkreises.

Man erhält also N auf folgende Weise: Man ziehe den Durchmesser OA senkrecht zur gegebenen Zone, ebenso OD senkrecht zu OA und mache dann noch $AN = AD$. Der Winkelpunkt einer Zone durch den Mittelpunkt des Grundkreises liegt auf dessen Peripherie und zwar auf dem zur Zone senkrechten Durchmesser. Der Winkelpunkt der unendlich fernen Zone (Zone in der horizontalen Ebene) ist der Mittelpunkt des Grundkreises.

Wir haben also auch bei der gnomonischen Projektion ein einfachstes Hilfsmittel zur Messung von Winkeln zwischen Flächenpolen. Seine Anwendung auf die Lösung der Grundaufgaben erfolge parallel dem Verfahren bei der stereographischen Projektion (Seite 10).

1. und 2. Pol P zu einer Zone Z liegt auf dem zu Z senkrechten Durchmesser OA und zwar ist P um 90° von A entfernt. Der Winkelpunkt zu OA ist N. Man mache also $ANP = 90°$. Auf umgekehrtem Wege erhält man zu P die polare Zone Z (Fig. 37).

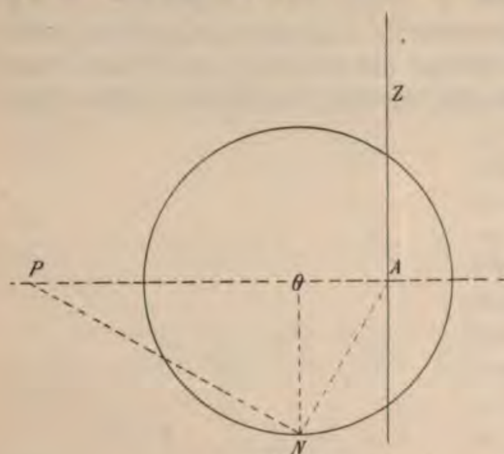


Fig. 37.

Die Pole aller Zonen durch den Grundkreismittelpunkt O liegen im Unendlichen. O selbst ist der Pol zur vertikalen Zone, deren Flächenpole im Unendlichen liegen.

3. und 4. sind bereits erledigt. Man suche den Winkelpunkt der Zone (nach Fig. 36) und verbinde N mit den beiden Polen. Der Winkel zwischen den beiden so erhaltenen Geraden ist direkt der gesuchte Winkel zwischen beiden Flächen.

Für einen unendlich fernen Flächenpol ist die Richtung der Normalen bestimmt durch die Schar der dazu parallelen Zonengeraden nach diesem Pol. Wie man demnach den Winkel α zwischen zwei unendlichen fernen Polen p_1 und p_2 erhält, zeigt Fig. 38.

6. Die Zone durch zwei gegebene Pole P und P_1 ist einfach die Gerade durch diese beiden Punkte.

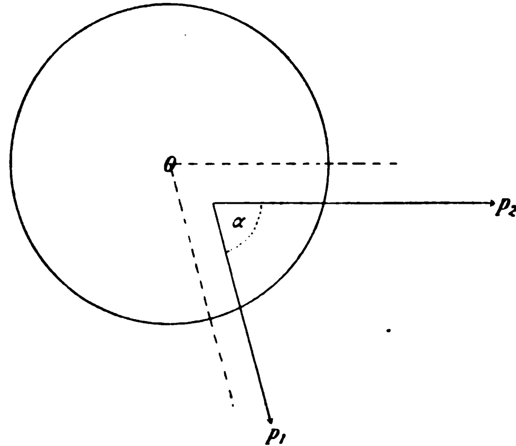


Fig. 38.

7. Um den Winkel zwischen zwei Zonen zu erhalten, sucht man deren Pole und mißt nach 3 den Winkel zwischen beiden. Auch kann man die Polare zum Schnittpunkt P der beiden Zonengeraden nach 2 suchen. Diese liefert zwei Schnittpunkte mit den beiden Zonengeraden; deren Abstand, nach 3 gemessen, ist der gesuchte Winkel. Diese Polare entspricht natürlich einer Zone, deren Ebene senkrecht ist zu allen Zonen durch den Schnittpunkt P. Man kann also auf der Geraden direkt jeden Winkel zwischen zwei Zonen durch P messen.

In manchen Fällen, z. B. wenn P nahe an O liegt, ermöglicht eine vorherige einfache Transformation der Zonen (z. B. Pa und Pb) durch P die Messung ihrer Winkel. Man dreht um eine Richtung DD' senkrecht zu PO, bis P ins Unendliche fällt, also um den Winkel PDP'. Alle Zonen durch P erscheinen nach dieser Transformation als parallele Gerade. Punkt M der vertikalen Zone fällt dabei nach M' (Fig. 39), die vertikale Zone (mit den

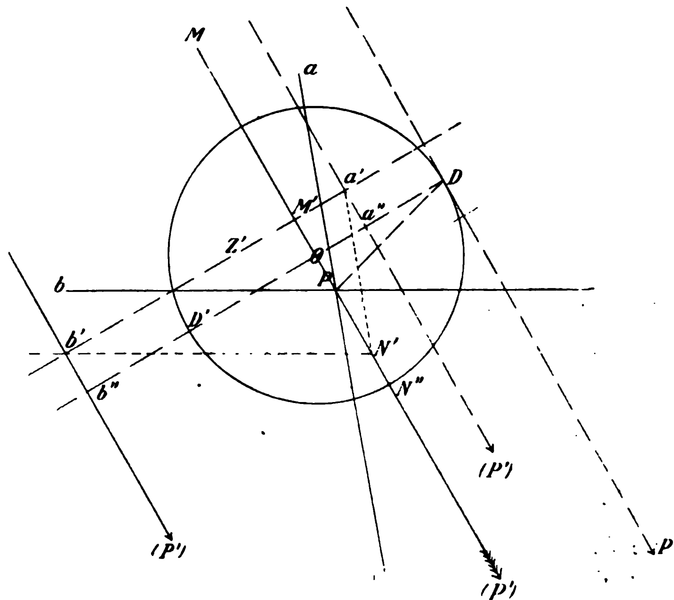


Fig. 39.

ursprünglich unendlich fernen Polen) in die Richtung der Geraden Z'. Man vermittele den Winkelpunkt N' zu Z' und ziehe dadurch die Parallelen zu den einzelnen Zonengeraden durch P. Dies liefert auf Z' die Punkte a', b'; die Geraden hierdurch parallel PO sind die transformierten Zonen Pa und Pb, wenigstens im richtigen gegenseitigen Abstand. Der Winkel zwischen parallelen Zonen ergibt sich aber einfach als Abstand ihrer Schnittpunkte a'' und b'' mit der zu ihnen senkrechten Geraden durch O (Winkelpunkt dazu in N'').

11. Transformation einer gegebenen gnomonischen Projektion (Fig. 40). Bei der Transformation einer gnomonischen Projektion auf eine

Fig. 40.

neue Projektionsebene kommt es, was die praktische Anwendung betrifft, vielfach nur auf die neue Richtung der transformierten Zonengeraden an. Diese erhält man einfach auf folgende Weise. Man ziehe die Gerade durch O und durch den Pol P der neuen Projektionsebene und ermittele die polare Gerade Z_1 zu diesem Pol.

Alle Punkte von Z_1 fallen bei der Transformation ins Unendliche, also M nach M', ebenso der Schnittpunkt m einer beliebigen, zu transformierenden Zone Z. Man suche den Winkelpunkt N_1 zu Z_1 und mache Om' parallel N_1m, dann ist leicht einzusehen, daß Om' die Richtung der Zone Z nach der Transformation ist.

Ihre wirkliche Lage erhält man nötigenfalls nach Parallelverschiebung durch einen entsprechenden Punkt auf der Geraden Z_2 mit dem Winkelpunkt N_2. In diese Gerade fallen nämlich alle Punkte, welche vorher im Unendlichen lagen, also Punkt S auf PM nach S'. Punkt n auf Z fällt nach n', welchen Punkt man erhält, indem man die Parallele N_2n' zu Z zieht; es wird nämlich auf diese Weise Winkelabstand $S'n'$ gleich dem Winkelabstand Sn. Die Parallele Z' durch n' zu N_1m liefert also die Zone Z in wahrer Lage nach der Transformation.

Z_1 und Z_2 sind die wichtigsten Hilfslinien für die Transformation einer gnomonischen Projektion. Goldschmidt nannte Z_1 die Linie der neuen Prismen und Z_2 die Linie der alten Prismen.

12. Die Normale zur Ebene einer Zone in orthogonaler Projektion auf die Zeichnungsebene (= orthogonale Projektion der Achse der in einer Geraden dargestellten Zone Z) ist einfach die Senkrechte Ok zur Zonengeraden (Fig. 41) in Analogie mit der orthogonalen Projektion der Achse (Kristallkante) einer stereographisch projizierten Zone (Seite 16).



Fig. 41.

Anwendung auf Kristalle.

Grenzen und Bedingungen der Verwendung. Zunächst ist auf die beiden bei dieser Anwendung sich besonders geltend machenden Unterschiede gegenüber der stereographischen Projektion hinzuweisen. 1. Bei Flächen mit starker Neigung (über 65° etwa bei mittlerem Radius) gegen das Projektionszentrum (Mittelpunkt des Grundkreises) wird die Darstellung mit Rücksicht auf die Ausdehnung der Zeichnung unmöglich. 2. Jene wenigen Operationen, welche bei der stereographischen Projektion die Zuhilfenahme von Kleinkreisen beanspruchten, erfordern bei der gnomonischen Projektion allgemein Kegelschnitte. Die dadurch bedingte Erschwerung wird behoben, wenn man die Lage eines Flächenpoles durch Koordinaten auf Grund von Messungen am zweikreisigen Goniometer bestimmt. Ausgehend von Messungen am gewöhnlichen Goniometer vermeidet man überhaupt diese Aufgaben, insbesondere durch geeignete Wahl der Fundamentalwinkel oder ersetzt sie in den unvermeidlichen Fällen durch eine kleine Rechnung. Die graphische Behandlung eines Komplexes von Flächen wird also nicht immer eine so ausschließliche, wie bei der stereographischen Projektion, wo jede Aufgabe auf einfachem graphischem Wege zu lösen war.

Die Anwendung der gnomonischen Projektion zur Darstellung eines Komplexes von Kristallflächen gestaltet sich besonders einfach, wenn man bedenkt, daß man als Projektionsebene gewöhnlich die Ebene senkrecht zur vertikal gestellten Kristallachse (*c*-Achse) nimmt. Die Projektionsebene schneidet jede Ebene, welche die Flächennormalen einer Zone enthält, in einer Geraden *ab*. Fig. 42 stelle eine solche Ebene dar mit den Normalen n_1, n_2, n_3 ... *M* ist der Mittelpunkt der Kugel (Augpunkt). Die Gerade *ab* ist parallel der horizontalen Flächennormalen n_1 (Fig. 39). Die Gerade *ab* ist außerdem die wahre Projektion der gewählten Zone. Mit Rücksicht auf das Gesetz der rationalen Doppelverhältnisse ist das Doppelverhältnis von vier Punkten auf *ab* auch ein rationales. Einzelne Strahlenbüschel von vier Strahlen, von denen einer immer n_1 sei, stellen harmonische Büschel dar; z. B. gelte das für $n_4 n_6 n_5 n_1$, d. h. das Doppelverhältnis $\frac{\sin n_4 n_5}{\sin n_6 n_5} : \frac{\sin n_4 n_1}{\sin n_6 n_1} = -1$.

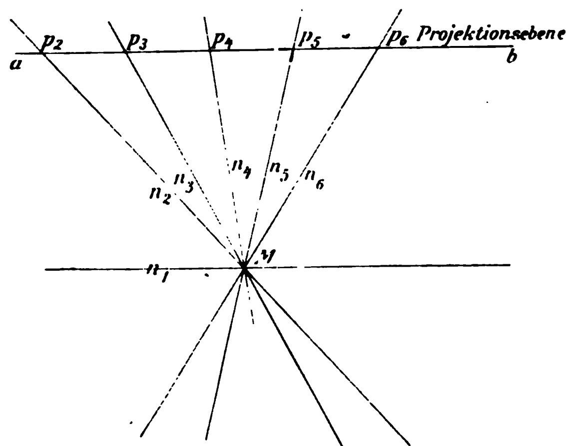


Fig. 42.

Also wird dann auf der Parallelen *ab* zu n_1 die Strecke $p_4 p_5 = p_5 p_6$.

Fig. 42 stelle nun die Zone (010) : (001) dar. Das obige Doppelverhältnis wird -1, z. B. für die vier Pole (0$\bar{1}$1), (001), (011), (010), ebenso für (001), (011), (021), (010) oder für (011), (021), (031), (010) usw. Also halbiert in der gnomonischen Projektion (Fig. 25) (001) die Strecke (0$\bar{1}$1) — (011), ebenso (011) die Strecke (001) — (021), ferner (021) die Strecke (011) — (031) usw. Es gilt also in der gnomonischen Projektion (für die gewählte Aufstellung) die Gleichheit der Strecken (0$\bar{1}$1) — (001) = (001) — (011) = (011) — (021) = = (021) — (031) ...

Ähnliches gilt für die Zone (100) : (001), wobei ($\bar{1}$01) — (001) = = (001) — (101) = (101) — (201) = (201) — (301) usw. Die beiden Zonen bezeichnen wir als Hauptzonen.

Die Parallelen zur Zonengeraden (010) : (001) durch die Pole (101), (201), (301) ... (Fig. 35) stellen die Zonen durch (010) und einen der Pole dar, ebenso die Parallelen zur Zonengeraden (100) : (001) durch die Pole (011), (021) ... die Zonen durch (100) und einen der Pole. Die beiden Systeme paralleler Geraden schneiden sich in Punkten, welche wieder Flächenpole darstellen. Je zwei beliebige solche weitere Pole bestimmen jede weitere Zone (Fig. 35).

Nach den gemachten Ausführungen ist für unsere Aufstellung und Wahl der Ebene die Ausführung einer gnomonischen Projektion sehr einfach. Man muß die Lage von (001) kennen, ferner den Winkel (010):(100), welcher gemessen wird als Winkel der beiden Zonengeraden, und schließlich die Strecken (001) — (011) und (001) — (101) (Elemente der Projektion). Diese beiden Strecken dienen als Koordinaten bei der Entwickelung aller übrigen Zonen und Flächen aus den gegebenen Elementen unter ausschließlicher Anwendung von Geraden.

Die Koordinaten kann man direkt aus den Indizes einer Fläche ableiten, durch eine Umformung, wobei der dritte Index gleich 1 gesetzt wird; z. B. Koordinaten für (113) sind $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{3}$, für (123) ebenso $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$.

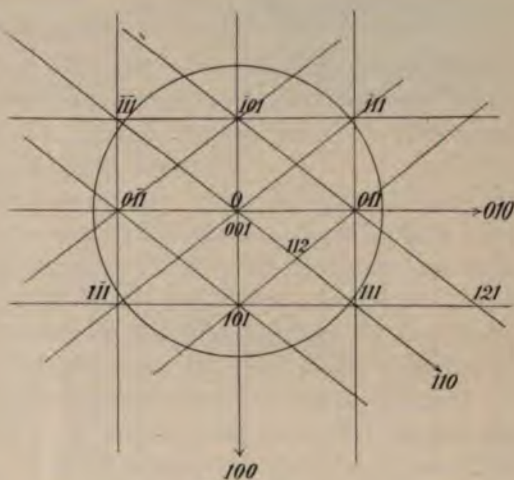


Fig. 43.

Wie sich eine gnomonische Projektion auf die Ebene senkrecht zur vertikalen Kristallachse (*c*-Achse) dem Auge dartut, sollen einige Beispiele zeigen. Fig. 35 bezieht sich auf eine trikline Kombination; Fig. 43 soll die Projektion einer rhombischen Kombination darstellen. (001) fällt mit *O* zusammen. Die ganze Projektion ist bestimmt durch die beiden Abstände (001):(011) und (001):(101).

Bei einem monoklinen Kristall (Fig. 44) braucht man zunächst die Neigung (001) gegen *O*, dann die beiden Abstände (001):(011) und (001):(101), um jeden beliebigen Komplex von Flächen für die bestimmten Kristallelemente ableiten zu können.

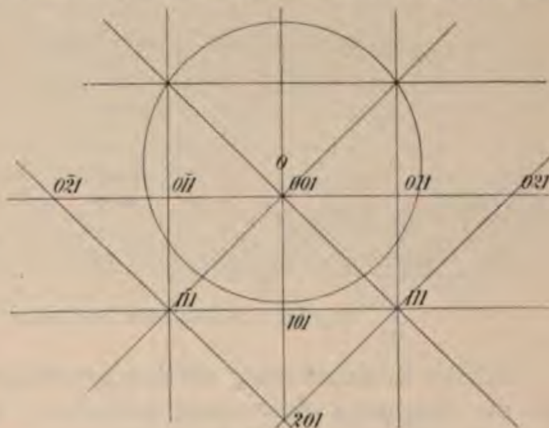


Fig. 44.

Wegen der besonderen Art der Lagebestimmung von Flächenpolen durch Koordinaten ist die Anwendung der gnomonischen Projektion in erster Linie in Verbindung mit der Kristallmessung am zweikreisigen Goniometer geboten. Man bestimmt hier die

Lage eines jeden Flächenpoles durch zwei Winkel, nämlich die Entfernung von einem Ausgangspol und das Azimut bezüglich eines Grundkreises. Auf diese Weise wird das Hindernis, welches sich der allgemeinen Anwendung der gnomonischen Projektion sonst entgegenstellt, die Konstruktion von Kegelschnitten vermieden. Die Pole werden direkt aus ihrer Position (mit dem Ausgangspol im Projektionszentrum) eingetragen und dann die nötigen Zonengeraden gezogen und die weiteren Anwendungen vom erhaltenen Diagramm gemacht.

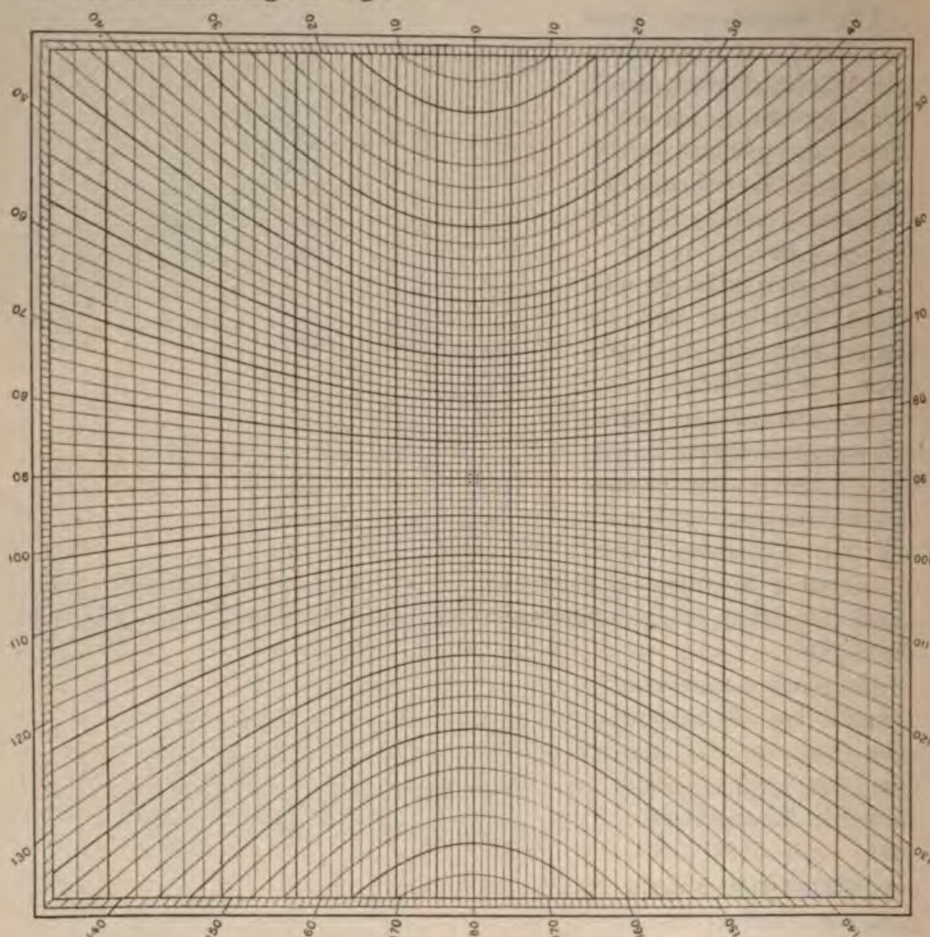


Fig. 45. Gnomonisches Netz (nach F. E. Wright).

Bei der Kristallmessung mit dem gewöhnlichen einkreisigen Goniometer ist die allgemeine Anwendung behindert. Wir müssen hierbei absehen von allen Konstruktionen, bei welchen Kleinkreise projiziert werden; man vermeidet sie entweder ganz oder ersetzt sie durch eine einfache Rechnung oder eine gleichwertige stereographische Konstruktion. Abgesehen von der Eintragung des Poles (001) (Nullpunkt der Projektion) im triklinen

System läßt sich jedoch die Einschränkung mit einfachen Mitteln umgehen und wie Fig. 44 und 43 erkennen lassen, ist die Projektion eines Flächenkomplexes aus den Elementen in den übrigen Systemen einfach.

Ausführung und Hilfsmittel. Bei der gnomonischen Projektion erweist sich auch die Anwendung besonderer Transporteure oder Netze für einen raschen Entwurf eines Diagrammes als förderlich.

1. Das gnomonische Netz nach V. Goldschmidt ist in seiner Anwendung, welche sich höchst einfach gestaltet, in erster Linie der Messung am zweikreisigen Goniometer angepaßt. Jeder Punkt darauf ist bestimmt durch Poldistanz und Azimut.

2. Ein anderes gnomonisches Netz nach Wright (Fig. 45, verkleinert) ist in seiner Anwendung ganz ähnlich dem stereographischen Netz nach Wulff. Es enthält an Stelle der Großkreise Gerade und an Stelle der Kleinkreise um die beiden Hauptpole Kegelschnitte (Hyperbeln).

3. Anwendung des Wulffschen Netzes. Ableitung der Elemente der gnomonischen Projektion aus einer stereographischen. Die Ermittlung der gnomonischen Elemente kann in allen Systemen (mit Ausnahme des triklinen) bei geeigneter Wahl der Fundamentalwinkel durch eine rein gnomonische Konstruktion erfolgen. Fig. 43 zeigt für das rhombische System die Anordnung der bestimmenden Pole. Noch einfacher ist diese im kubischen, tetragonalen, hexagonalen und trigonalen System. Im monoklinen System (Fig. 44) ist noch die Neigung von (001) gegen das Projektionszentrum abzutragen. Manchmal kann die Berechnung der Elemente nötig sein, welche dann meist einfach trigonometrisch erfolgt. Im triklinen System (Fig. 46a) ist die Lage von (001) durch zwei Größen bestimmt, nämlich durch δ, den Winkel zwischen den beiden unendlich fernen



Fig. 46 a.

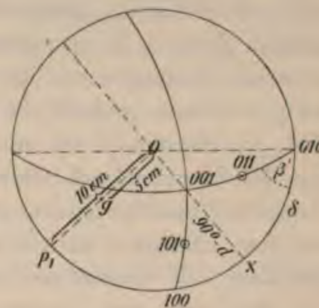


Fig. 46 b.

Punkten (010) und x und durch d, den Abstand (001) von O. Beide Größen kann man trigonometrisch berechnen; einen einfachen Fall erläutert die stereographische Projektion (Fig. 46b), wo δ und $90 - d$ als Seiten eines recht-

winkligen Dreiecks erscheinen, worin (001) : (010) und β als gegeben gelten sollen.

Die graphische Bestimmung der gnomonischen Elemente mit Hilfe des Wulffschen Netzes vollzieht sich auf folgende Weise: Man entwerfe die stereographische Projektion der hauptsächlichen Pole (Fig. 46b). Auf dem Durchmesser Ox (Fig. 46a und b) erhält man drei Punkte, nämlich (001), dann den Schnittpunkt q_1 mit der Zone [100 : 011] und den Schnittpunkt r_1 mit der Zone [010 : 101]. Man entnimmt der Projektion die Winkelabstände $d = (0 : 001)$, $\mu = Oq_1$ und $\nu = Or_1$.

Nun erfolgt der Übergang zur gnomonischen Projektion, etwa für einen Grundkreisradius von 5 cm. Zur Geraden Ox, welche erhalten bleibt[1]), ziehe man die Senkrechte und mache $Og = 5$ cm (Fig. 46a). Man legt g über den Mittelpunkt des Netzes und Og auf den Äquator und trage mit Hilfe des geteilten Grundkreises die Winkel d, μ, ν ab. Dies liefert auf Ox die gnomonischen Projektionen von (001), q_1 und r_1. Nun ziehe man durch (001) und q_1 die Parallelen zu (0,100) und durch (001) und r_1 die Parallelen zu (0,010) der Fig. 46b. Damit sind die Hauptpole der stereographischen Projektion in Fig. 46b gnomonisch projiziert. Siehe auch Seite 16 und 71.

Man schränke bei der Durchführung die eigentliche Zeichnung der Hilfslinien möglichst ein; es genügt meist die Ermittelung der Schnittpunkte.

Als Beispiel für die Eintragung weiterer Flächenpole aus den Indizes diene (231) (Fig. 35). Man trage auf der Geraden [001 : 010] von (001) aus die dreifache Strecke (001, 011) ab, ebenso auf [001 : 100] die zweifache Strecke (001, 101). Man erhält dadurch die beiden Pole (031) und (201). Die Parallelen durch diese Punkte zu den beiden Hauptzonen liefern in ihrem Schnittpunkt den Flächenpol (231).

Auch die Messung einzelner Winkel zwischen zwei Flächenpolen läßt sich noch mit Hilfe des Wulffschen Netzes durchführen, ohne daß die Figur allzusehr mit Hilfslinien überladen wird. Dabei sind Zirkel und Lineal mitzubenutzen. Es sei z. B. zu messen (Fig. 35) der Abstand (101) : (011). Man ziehe zu dieser Zonengeraden die Parallele durch den Mittelpunkt O. Die Zeichnung wird dann gedreht, bis diese Gerade auf den Poldurchmesser des Netzes fällt. Im Abstand 5 cm von O ($= 53\frac{1}{4}°$ des Netzes) erhält man einen Punkt auf der Geraden und ebenso einen im Schnittpunkt der Zone mit dem Äquator. Von letzterem aus trägt man die Strecke zwischen den beiden Punkten mit dem Zirkel über dem Äquator ab. Dadurch erhält man den Winkelpunkt W der Zone. W kommt nun über den Mittelpunkt des Netzes, die Verbindung (W, 011) über den Äquator und ein Lineal an die Verbindung (W, 101). Auf dem Grundkreis des Netzes erhält man den gesuchten Winkel.

Anwendung auf Zwillinge.

Die gnomonische Projektion eines monoklinen Zwillingskristalles zeigt Fig. 47. Von den Polen des Kristalles in normaler Stellung finden sich

1) Liegt (001) nahe bei O, dann ist es besser, die Neigung δ zu berechnen.

nur (111), $(1\bar{1}1)$, $(\bar{1}11)$, $(\bar{1}\bar{1}1)$ und (001) ausdrücklich bezeichnet. Die Pole in Zwillingsstellung mit unterstrichenem Symbol — z. B. $\underline{111}$ — sind durch kleine Kreise markiert. Zwillingsebene ist (011), also die Umdrehungsachse im Punkte (011), (Seite 16).

Die Pole in Zwillingsstellung wurden auf folgende Weise erhalten: $(\underline{111})$ liegt auf der Geraden [011 : 111]; man macht von dessen Winkelpunkt N aus Winkelabstand $(011):(\underline{111}) = (011):(111) = \alpha$. Ähnlich findet man $(\underline{\bar{1}11})$ und dann auch $(\underline{010})$ und $(\underline{\bar{1}10})$. Die übrigen Pole ergeben sich nun als Schnittpunkte von Geraden und zwar

$(\underline{\bar{1}1\bar{1}})$ — Schnittpunkt der Zonen $[\underline{010} : \underline{111}]$ und $[\underline{\bar{1}11} : \underline{\bar{1}10}]$.
$(\underline{110})$ — » » » $[\underline{\bar{1}10} : \underline{010}]$ » [011 : 110].
$(\underline{11\bar{1}})$ — » » » $[\underline{010} : \underline{\bar{1}11}]$ » $[\underline{111} : \underline{110}]$.
$(\underline{01\bar{1}})$ — » » » [011 : 001] » $[\underline{\bar{1}1\bar{1}} : \underline{11\bar{1}}]$.

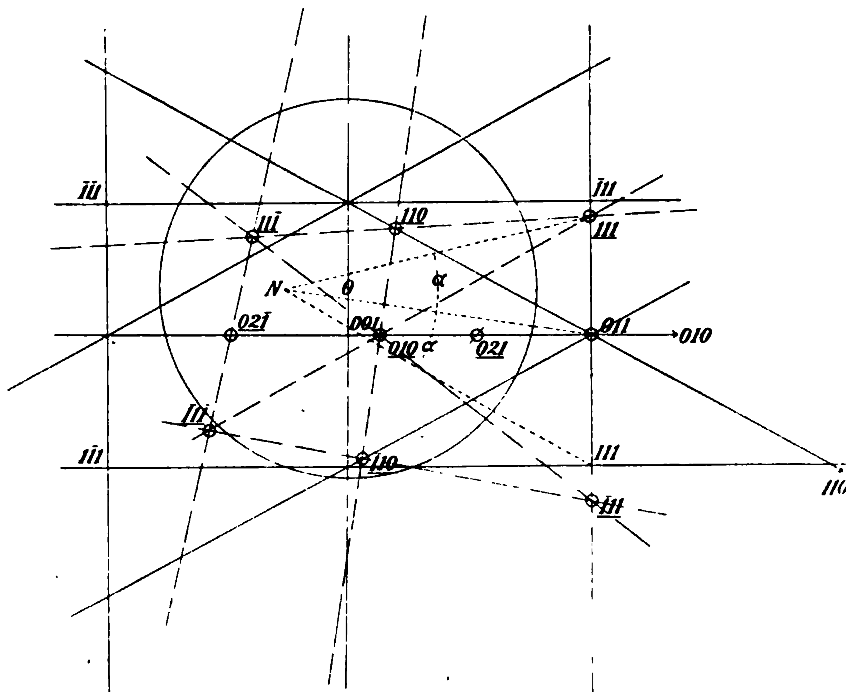


Fig. 47 [1]).

Die Zonen durch den Pol der Zwillingsachse behalten also ihre Richtung in der Zwillingsstellung bei.

Praktisch genügt die Eintragung von vier nicht in einer Zone liegenden Flächenpolen, abgesehen von der Zwillingsebene selbst, um den gesamten Flächenkomplex in Zwillingsstellung ableiten zu können. Man kann also die einfachst zu transformierenden Pole in mäßiger Zahl auswählen, um die ganze Projektion des Zwillingsindividuums zu erhalten.

1) Druckfehler: Lies darin $\underline{01\bar{1}}$ statt $\underline{02\bar{1}}$.

Beziehung zwischen stereographischer und gnomonischer Projektion.

In Fig. 48 ist V ein Vertikalkreis der Bezugskugel, Es die Spur der Ebene der stereographischen und Eg jene der gnomonischen Projektion. Ein Pol P auf der Kugel erscheint in stereographischer Projektion in Ps, in gnomonischer in Pg. Os und Og sind die zugehörigen Mittelpunkte der Grundkreise.

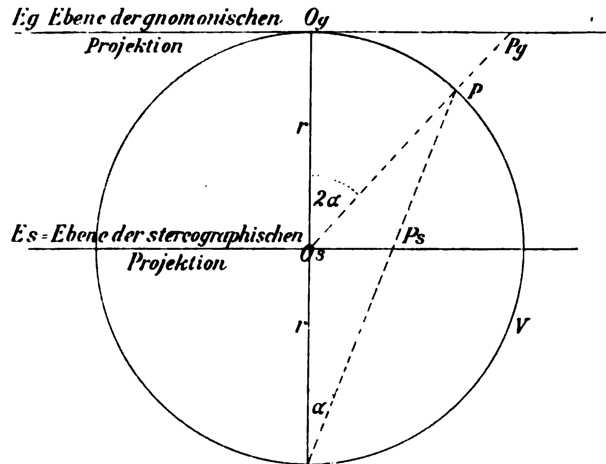


Fig. 48.

Der Abstand $OsPs$ ergibt sich aus einem rechtwinkligen Dreieck mit den Bestimmungsstücken r und α, der Abstand $OgPg$ aus einem zweiten solchen Dreieck mit den Bestimmungsstücken r und 2α.

Diese Beziehung benutzt man, um aus einer stereographischen Projektion die gnomonische abzuleiten und umgekehrt, wie Fig. 49 zeigt. Der Punkt Ps sei stereographisch projiziert. Um daraus Pg (gnomonisch) zu erhalten, ziehe man den Durchmesser PsO und senkrecht OD. Dann mache man $\measuredangle\, ODPs = PsDPg = \alpha$ und erhält Pg (d. h. die gnomonische Projektion des Poles P).

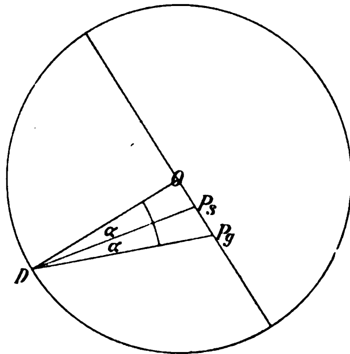


Fig. 49.

Man wendet die Konstruktion z. B. an, um die Elemente einer gnomonischen Projektion im allgemeinsten Falle (triklines System) ganz oder teilweise zu konstruieren. Man ermittelt insbesondere die Lage von (001) in stereographischer Projektion und erhält man daraus seine Lage in gnomonischer Projektion (Nullpunkt der gnomonischen Projektion). Dies ersetzt die Berechnung der beiden Stücke d und δ.

Diese Beziehung zwischen gnomonischer und stereographischer Projektion kann man zur indirekten Auflösung von Aufgaben der gnomonischen Projektion mit Hilfe der stereographischen benutzen, besonders in jenen Fällen, wo Kegelschnitte auftreten.

Anhang: **Lineare Projektion nach Quenstedt.**

Seltenere Anwendung findet die Quenstedtsche Projektion. Wie es in Fig. 50 für einen triklinen Kristall geschehen ist, benutzen wir als Projektionsebene eine Fläche parallel {001}, nämlich die Ebene der *a*- und *b*-Achse des Kristalles. Alle Kristallflächen werden nun parallel sich selbst verschoben, bis sie durch denselben Punkt der *c*-Achse über der Zeichnungsebene gehen, nämlich den Punkt im Abstand von *O* gleich der *c*-Achse für die Grundform. Jede Fläche schneidet die Projektionsebene in einer Geraden; sie projiziert sich also als Gerade. Die Zonen projizieren sich als Punkte. Jeder Schnittpunkt zweier Flächengeraden stellt die Projektion einer Zone dar.



Fig. 50.

Die Geraden für die Flächen, parallel der *c*-Achse, gehen durch den Projektionsmittelpunkt *O*, z. B. in Fig. 50 die Flächen (1$\bar{1}$0), (100) und (010). Die Flächengerade (011) schneidet die Gerade für (100) im Abstand der *b*-Achse und ist parallel der Geraden für (010); ähnlich erhält man die Projektion von (101). Damit sind weitere Formen bestimmt; z. B. (1$\bar{1}$0) in den Zonen [010 : 100] und [011 : 101] erscheint als Gerade durch *O* und a_1; (111) in den Zonen [100 : 011] und [010 : 101] projiziert sich in der Geraden durch die beiden Schnittpunkte a_2 und a_3. Eine Fläche *x* durch a_3 und a_4 — also in den Zonen [010 : 101] und [$\bar{1}$01 : 1$\bar{1}$0] — liefert nach der Zeichnung die Parameter $a : -\frac{b}{2} : c$, hat also das Symbol (1$\bar{2}$1), wie es auch die Zonenrechnung ergibt.

Fig. 51 erläutert die Anwendung im trigonalen System unter Benutzung der Bravaisschen Symbole. Eingetragen sind: das hexagonale Prisma erster Art {10$\bar{1}$0} und der Grundrhomboeder {10$\bar{1}$1}. Es soll das Symbol jener hexagonalen Pyramide zweiter Art, x_1 ermittelt werden, deren Polkanten von {10$\bar{1}$1} gerade abgestumpft werden. Die Projektion der gesuchten rechten Fläche x_1 ist senkrecht zur Geraden — *a*; die Geraden (10$\bar{1}$1), x_1 und x_2 gehen durch den Zonenpunkt *M*. Aus der Projektion ergibt sich nun leicht das Ver-



Fig. 51.

hältnis der Achsenabschnitte für x_1, nämlich $\frac{3}{2}a : \frac{3}{2}a : -\frac{3}{4}a : c$; also sind die Indizes $(22\bar{4}3)$.

Eine umfangreichere Anwendung findet die Quenstedtsche Projektion nicht. Wegen ihrer Einfachheit kann man sie aber zweckmäßig bei der ersten Einführung in das Studium der Kristalle benutzen; sie bildet ein einfaches didaktisches Hilfsmittel.

B. Allgemeine Gleichungen der Kristallberechnung.

Die rechnerischen Größen, welche in der geometrischen Kristallographie vorkommen, sind Parameter, Indizes und Winkel. Die Beziehungen zwischen einzelnen dieser Größen ergeben die verschiedenen Grundgleichungen der geometrischen Kristallographie. Dieses sind die folgenden:

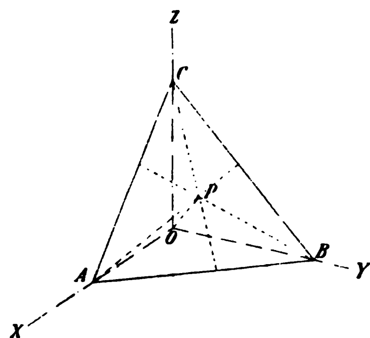


Fig. 52.

1. Grundgleichung einer Kristallfläche. In Fig. 52 seien OX, OY, OZ die Richtungen der Achsen eines Kristalles mit dem Grundverhältnis $a:b:c$. Die Ebene ABC sei eine Fläche mit dem Parameterverhältnis $a_1 : b_1 : c_1$. Wenn (hkl) die Indizes der Fläche sind, dann ist $\frac{a}{h} = a_1$; $\frac{b}{k} = b_1$ und $\frac{c}{l} = c_1$.

PO sei die Normale auf die Fläche durch O; ihre Winkel mit den drei Kristallachsen sind POX, POY und POZ. Es ist

$$\cos POX = \frac{PO}{a_1};\ \cos POY = \frac{PO}{b_1} \text{ und } \cos POZ = \frac{PO}{c_1};$$

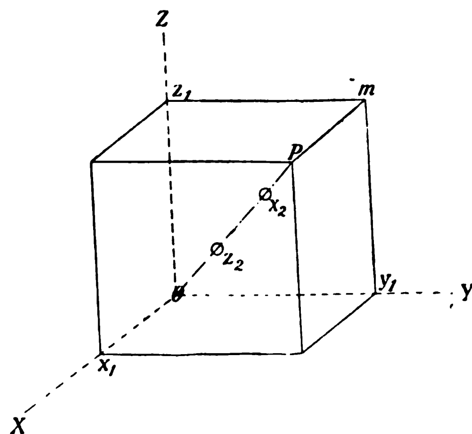


Fig. 53.

also auch

$$PO = a_1 \cos POX = b_1 \cos POY = c_1 \cos POZ;$$

also nach Substitution

$$\frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ, \qquad (1)$$

wobei PX an Stelle von POX usw. geschrieben ist.

In Fig. 52 ist ABC eine beliebige Kristallfläche, OP die Normale darauf durch den Schnittpunkt. Es seien $Ox_1 = x$, $Oy_1 = y$ und $Oz_1 = z$ (Fig. 53) die Kordinaten von P. Zieht man durch P die Parallelen zu den Achsenrichtungen, dann bestimmen die Längen x, y, z ein

schiefwinkliges Parallelepiped, worin $OP = p$ eine Diagonale ist. Man ziehe von Z_1 die Normale auf OP, ebenso von m aus; dann ist

$$Oz_2 = z \cos POz_1 \quad \text{und} \quad Px_2 = x \cos POx_1.$$

Ebenso ist, wie mit Hilfe einer Parallelverschiebung von mz_1 sich ergibt

$$z_2x_2 = z_1m \cos POy_1 = y \cos POy_1;$$

also

$$Px_2 + z_2x_2 + z_2O = PO = x \cos POx_1 + y \cos POy_1 + z \cos POz_1,$$

bezeichnet man die Winkel abkürzend mit μ, ν, λ und PO mit p; dann ergibt sich die Flächengleichung

$$x \cos\mu + y \cos\nu + z \cos\lambda = p.$$

Es ist ferner

$$\cos\mu = \frac{ph}{a}; \ \cos\nu = \frac{pk}{b} \ \text{und} \ \cos\lambda = \frac{pl}{c};$$

also

$$h\frac{x}{a} + k\frac{y}{b} + l\frac{z}{c} = 1$$

oder nach paralleler Verschiebung der Ebene in den Anfangspunkt O

$$h\frac{x}{a} + k\frac{y}{b} + b\frac{z}{c} = o. \quad \text{(Flächengleichung) (2)}$$

2. **Bestimmung der Winkel PX, PY, PZ aus den Elementen des Kristalles und den Indizes der Fläche P.**

Fig. 54 stellt die stereographische Projektion der Punkte X, Y, Z, P dar, in welchen eine Kugel um O die Geraden OX, OY, OZ und OP schneidet. Der Abstand YZ usw., d. h. die Winkel zwischen je zwei Achsen seien mit α, β, γ bezeichnet. Die drei Winkel bei P seien ξ, η, ζ.

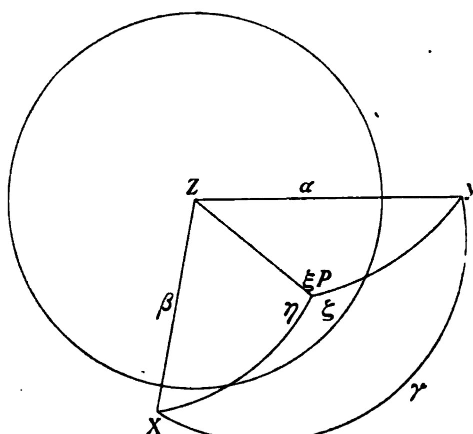


Fig. 54.

Es bestehen die Gleichungen

$$\cos\xi = \frac{\cos\alpha - \cos PY \cdot \cos PZ}{\sin PY \cdot \sin PZ}$$

$$\cos\eta = \frac{\cos\beta - \cos PX \cdot \cos PZ}{\sin PX \cdot \sin PZ}$$

$$\cos\zeta = \frac{\cos\gamma - \cos PX \cdot \cos PY}{\sin PX \cdot \sin PY}.$$

Ferner ist

$$\cos\zeta = \cos(\xi + \eta) = \cos\xi \cdot \cos\eta - \sin\xi \cdot \sin\eta$$

also

$$(\cos\zeta - \cos\xi \cdot \cos\eta)^2 = (1 - \cos^2\xi) \cdot (1 - \cos^2\eta).$$

Durch Substitution und Umformung ergibt sich:

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma =$$
$$= \cos^2 PX + \cos^2 PY + \cos^2 PZ - \cos^2\alpha \cos^2 PX - \cos^2\beta \cos^2 PY - \cos^2\gamma \cos^2 PZ$$
$$- 2(\cos\alpha - \cos\beta \cdot \cos\gamma) \cdot \cos PY \cdot \cos PZ$$
$$- 2(\cos\beta - \cos\alpha \cdot \cos\gamma) \cdot \cos PX \cdot \cos PZ$$
$$- 2(\cos\gamma - \cos\alpha \cdot \cos\beta) \cdot \cos PX \cdot \cos PY.$$

Man setze aus (1) $\cos PY = \frac{ak}{bh} \cos PX$ und $\cos PZ = \frac{al}{ch} \cos PX$ und erhält

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma =$$
$$= \cos^2 PX \cdot \Big(\sin^2\alpha + \frac{a^2 k^2}{b^2 h^2} \sin^2\beta + \frac{a^2 l^2}{c^2 h^2} \sin^2\gamma$$
$$- 2\frac{a^2 kl}{bch^2} (\cos\alpha - \cos\beta \cdot \cos\gamma)$$
$$- 2\frac{al}{ch} (\cos\beta - \cos\alpha \cdot \cos\gamma)$$
$$- 2\frac{lak}{bh} (\cos\gamma - \cos\alpha \cdot \cos\beta)\Big)$$

Durch Umformung und Multiplizieren mit $\frac{h^2}{a^2}$ erhält man

$$\cos PX = \frac{h}{a} \cdot \frac{\sqrt{M_1}}{\sqrt{N_1}}, \quad \text{wobei} \tag{3a}$$

$$M_1 = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \quad \text{und}$$
$$N_1 = \frac{h^2}{a^2} \cdot \sin^2\alpha + \frac{k^2}{b^2} \cdot \sin^2\beta + \frac{l^2}{c^2} \cdot \sin^2\gamma$$
$$- \frac{2kl}{bc} (\cos\alpha - \cos\beta \cdot \cos\gamma)$$
$$- \frac{2hl}{ac} (\cos\beta - \cos\alpha \cdot \cos\gamma)$$
$$- \frac{2hk}{ab} (\cos\gamma - \cos\alpha \cdot \cos\beta).$$

Ebenso ergeben sich die beiden weiteren Gleichungen

$$\cos PY = \frac{k}{b} \cdot \frac{\sqrt{M_1}}{\sqrt{N_1}} \tag{3b}$$

$$\cos PZ = \frac{l}{c} \cdot \frac{\sqrt{M_1}}{\sqrt{N_1}}. \tag{3c}$$

3. **Den Winkel zwischen zwei Flächen aus ihren Indizes und den Elementen des Kristalles zu bestimmen.**

In Fig. 55 seien in stereographischer Projektion X, Y und Z die Durchtrittpunkte der Achsen, P und Q zwei Flächenpole (hkl) und (pqr). Die Ableitung der Beziehungen ist zwar elementar, aber umständlich; der Weg sei kurz angedeutet[1]).

Es ist

$$\cos PQ = \cos PX \cdot \cos QX + \sin PX \sin QX \cdot \cos PXQ =$$
$$= \cos PX \cdot \cos QX + \sin PX \cdot \sin QX \cdot \cos(ZXQ - ZXP).$$

Ebenso erhält man eine zweite Gleichung

$$\cos PQ = \cos PZ \cdot \cos QZ + \sin PZ \cdot \sin QZ \cos(YZP - YZQ).$$

Jede der beiden Gleichungen wird nun für sich weiter behandelt, indem man $\cos(ZXQ - ZXP)$ und $\cos(YZP - YZQ)$ nach den Regeln der Trigonometrie auflöst und die einzelnen Cosinusse aus den sie bestimmenden Dreiecken ermittelt; die vorkommenden Sinusse ersetzt man durch $\sqrt{1-\cos^2}$. Auf diese Weise erhält man zwei analoge quadratische Gleichungen für $\cos^2 PQ$, die eine Gleichung enthält nur Sinus und Cosinus von β und Cosinus von PX, QX, PZ und QZ, die andere entsprechend α, PZ, QZ, PY, QY.

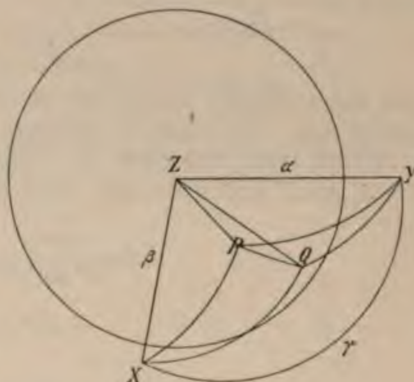


Fig. 55.

Diese beiden Gleichungen vereinigt man, indem man $\cos^2 PQ$ eliminiert. Dann substituiert man noch PX, für PY und PZ, ebenso QX für QY und QZ aus Gleichung (1) und benutzt schließlich noch die Gleichungen (2). Dann erhält man:

$$PQ = \frac{\begin{array}{l} hp\,b^2c^2 \sin^2\alpha + kq\,a^2c^2 \sin^2\beta + lr\,a^2b^2 \sin^2\gamma \\ -(kr + ql)(\cos\alpha - \cos\beta \cdot \cos\gamma) \cdot a^2bc \\ -(hr + lp)(\cos\beta - \cos\alpha \cdot \cos\gamma) \cdot ab^2c \\ -(pk + qh)(\cos\gamma - \cos\alpha \cdot \cos\beta) \cdot abc^2 \end{array}}{\sqrt{\begin{array}{l} \{h^2b^2c^2 \sin^2\alpha + k^2a^2c^2 \sin^2\beta + l^2a^2b^2 \sin^2\gamma \\ -2abc[akl(\cos\alpha - \cos\beta \cdot \cos\gamma) + bhl(\cos\beta - \cos\alpha \cdot \cos\gamma) + chk(\cos\gamma - \cos\alpha \cdot \cos\beta)]\} \\ \times \{p^2b^2c^2 \sin^2\alpha + q^2a^2c^2 \sin^2\beta + r^2a^2b^2 \sin^2\gamma \\ -2abc[aqr(\cos\alpha - \cos\beta \cdot \cos\gamma) + bpr(\cos\beta - \cos\alpha \cdot \cos\gamma) + cpq(\cos\gamma - \cos\alpha \cdot \cos\beta)]\} \end{array}}}$$

In dieser Gleichung dividiert man noch Zähler und Nenner durch $a^2b^2c^2 \sin^2\beta$.

1) A. Schrauf, Lehrbuch der Kristallographie. Wien 1866.

Ferner seien in Fig. 56 die Pole der drei Achsenebenen YZ, XY und XY als $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ eingetragen. Die Winkel zwischen den Polen seien:

$$\mathfrak{Z}:\mathfrak{Y} = (001):(010) = 180 - A$$
$$\mathfrak{X}:\mathfrak{Z} = (100):(001) = 180 - B$$
$$\mathfrak{X}:\mathfrak{Y} = (100):(010) = 180 - C.$$

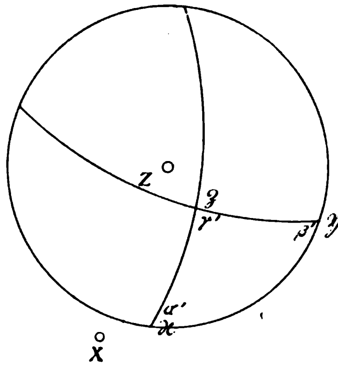


Fig. 56.

Die Winkel zwischen den Zonenkreisen, z. B. zwischen $\mathfrak{X}\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ sind die Winkel zwischen je zwei Achsen und es ist $\alpha' = 180 - \alpha$; $\beta' = 180 - \beta$ und $\gamma' = 180 - \gamma$. Es ist also ferner

$$-\cos A = \frac{\cos\beta\cdot\cos\gamma - \cos\alpha}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}$$

$$-\cos B = \frac{\cos\alpha\cdot\cos\gamma - \cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}$$

$$-\cos C = \frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \cos\gamma}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

Führt man außerdem in obige Gleichung durch Substitution noch $\cos A$, $\cos B$ und $\cos C$ ein, dann erhält man:

$$\cos PQ = \frac{\begin{array}{l} hp\dfrac{\sin^2\alpha}{a^2\sin^2\beta} + kq\dfrac{1}{b^2} + lr\cdot\dfrac{\sin^2\gamma}{c^2\sin^2\beta} \\ -(kr+ql)\cdot\cos A\cdot\dfrac{\sin\gamma}{bc\sin\beta} \\ -(hr+lp)\cdot\cos B\cdot\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{ac\sin^2\beta} \\ -(pk+qh)\cdot\cos C\cdot\dfrac{\sin\alpha}{ab\sin\beta} \end{array}}{\sqrt{\begin{array}{l} \left\{h^2\dfrac{\sin^2\alpha}{a^2\sin^2\beta} + k^2\cdot\dfrac{1}{b^2} + l^2\cdot\dfrac{\sin^2\gamma}{c^2\sin^2\beta}\right. \\ \left. -2kl\cdot\cos A\cdot\dfrac{\sin\gamma}{bc\sin\beta} - 2hl\cos B\cdot\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{ac\sin^2\beta} - 2hk\cdot\dfrac{\sin\alpha}{ab\sin\beta}\right\} \\ \times\left\{p^2\dfrac{\sin^2\alpha}{a^2\sin^2\beta} + q^2\dfrac{1}{b^2} + r^2\cdot\dfrac{\sin^2\gamma}{c^2\sin^2\beta}\right. \\ \left. -2qr\cdot\cos A\cdot\dfrac{\sin\gamma}{bc\sin\beta} - 2pr\cdot\cos B\cdot\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{ac\cdot\sin^2\beta} - 2pq\cdot\dfrac{\sin\alpha}{ab\sin\beta}\right\} \end{array}}}.$$

Nun wird bei Kristallen $b = 1$; ferner substituieren wir nach Dufet

$$\lambda^2 = \frac{\sin^2\alpha}{a^2\sin^2\beta}$$
$$\nu^2 = \frac{\sin^2\gamma}{c^2\sin\beta^2}$$

$$L = -\nu \cos A$$
$$M = -\lambda \cdot \nu \cdot \cos B$$
$$N = -\lambda \cdot \cos C$$

und erhalten die einfachere Gleichung

$$\cos PQ = \frac{\lambda^2 hp + kq + \nu^2 lr + L(kr+ql) + M(hr+lp) + N(pk+qh)}{\sqrt{\{\lambda^2 h^2 + k^2 + \nu^2 l^2 + 2Lkl + 2Mhl + 2Nhk\} \times \{\lambda^2 p^2 + q^2 + \nu^2 r^2 + 2Lqr + 2Mpr + 2Npq\}}} \cdot (5)$$

Gleichung (5) gilt für das trikline System, worin A, B und C von 90° verschieden sind. In den Systemen mit höherer Symmetrie vereinfacht sich diese Gleichung ganz bedeutend. Dufet hat ihre Verwendbarkeit für die verschiedenen Systeme dargetan, so daß man von dieser Grundgleichung bei der speziellen Kristallberechnung nutzbringende Anwendung machen kann.

Durch eine elementare, aber etwas langwierige Umformung erhält man aus $\cos PQ$ auch einen Ausdruck für sin PQ.

4. Beziehung zwischen den Indizes dreier Flächen einer Zone.

Je zwei Kristallflächen $(h_1 k_1 l_1)$ und $(h_2 l_2 k_2)$ bestimmen eine Zone; deren Achse ist die Schnittgerade der beiden Ebenen.

Man verlege durch Parallelverschiebung die beiden Flächen nebst ihrer Durchschnittsgeraden in den Ausgangspunkt O (Seite 46); die beiden Flächengleichungen

$$h_1 \frac{x}{a} + k_1 \frac{y}{b} + l_1 \frac{z}{c} = 0$$
$$h_2 \frac{x}{a} + k_2 \frac{y}{b} + l_2 \frac{z}{c} = 0$$

ergeben durch Elimination von x:

$$\frac{y}{b(h_2 l_1 - l_2 h_1)} = \frac{z}{c(k_2 h_1 - h_2 k_1)},$$

ebenso durch Elimination von y:

$$\frac{x}{a(l_2 k_1 - k_2 l_1)} = \frac{z}{c(k_2 h_1 - h_2 k_1)};$$

also zusammen

$$\frac{x}{a(l_2 k_1 - k_2 l_1)} = \frac{y}{b(h_2 l_1 - l_2 h_1)} = \frac{z}{c(k_2 h_1 - k_1 h_2)}. \quad (6)$$

Die drei rationalen Zahlen

$$u = l_2 k_1 - k_2 l_1,$$
$$v = h_2 l_1 - l_2 h_1,$$
$$w = k_2 h_1 - h_2 k_1$$

bestimmen das Symbol $[uvw]$ der Zone. Man erhält dieses auf einfache Weise nach folgendem Schema aus den Indizes der beiden Flächen

$$\begin{array}{c|cccc|c} k_1 & k_1 & l_1 & h_1 & k_1 & l_1 \\ & & \times & \times & \times & \\ h_2 & k_2 & l_2 & h_2 & k_2 & l_2 \\ \hline & & u & v & w & \end{array}$$

Für eine dritte Fläche $(h_3 k_3 l_3)$, welche derselben Zone angehört, gilt die Gleichung

$$h_3 \frac{x}{a} + k_3 \frac{y}{b} + l_3 \frac{z}{c} = 0 .$$

Man substituiere aus Gleichung (6)

$$y = x \cdot \frac{bv}{au} \quad \text{und} \quad z = x \cdot \frac{cw}{au}$$

und erhält demnach

$$h_3 \frac{x}{a} + k_3 \frac{xv}{au} + l_3 \frac{xw}{au} = 0$$

oder

$$h_3 u + k_3 v + l_3 w = 0 . \qquad \text{(Zonengleichung)} \quad (7)$$

Im Sinne der Determinantenrechnung wird diese Beziehung auch geschrieben:

$$\begin{vmatrix} h_1 k_1 l_1 \\ h_2 k_2 l_2 \\ h_3 k_3 l_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Indizes dreier Flächen, welche der gleichen Zone angehören, stehen also in höchst einfacher Beziehung zueinander, deren Inhalt auf verschiedene Weise ausgedrückt werden kann:

1. Die Determinante der Indizes dreier Flächen derselben Zone ist gleich Null.

2. Die Summe der drei Produkte aus je einem Index des Zonensymboles und der entsprechenden Ziffer eines Flächensymboles dieser Zone ist gleich Null.

Die obigen Gleichungen liefern eine Kontrolle für die richtige Bestimmung der Symbole einer Fläche in einer bekannten Zone. Jedes solche Symbol enthält ferner zwei Unbekannte, nachdem man einen Index beliebig gleich 1 setzen kann. Ist also noch ein weiterer Index bekannt, dann kann man aus der Zonengleichung den dritten bestimmen.

Obige Zonengleichung liefert noch eine weitere Beziehung der Indizes dreier Flächen einer Zone. Die drei Flächen $(h_1 k_1 l_1)$, $(h_2 k_2 l_2)$ und $(h_3 k_3 l_3)$ liefern drei verschiedene Formen des Symboles der Zone

$$[u_1 v_1 w_1] = \left\| \begin{matrix} h_2 k_2 l_2 \\ h_3 k_3 l_3 \end{matrix} \right\|$$

$$[u_2 v_2 w_2] = \left\| \begin{matrix} h_1 k_1 l_1 \\ h_3 k_3 l_3 \end{matrix} \right\|$$

und

$$[u_3 v_3 w_3] = \left\| \begin{matrix} h_1 k_1 l_1 \\ h_2 k_2 l_2 \end{matrix} \right\| .$$

Die einzelnen Zonensymbole oder auch die entsprechenden Indizes der drei Symbole unterscheiden sich nur durch rationale Faktoren und zwar sei

$$u_2 = \lambda_1 u_1; \quad u_3 = \mu_1 u_1$$
$$v_2 = \lambda_1 v_1; \quad v_3 = \mu_1 v_1$$
$$w_2 = \lambda_1 v_1; \quad w_3 = \mu_1 w_1 .$$

Es gelten die folgenden Gleichungen:

a) $$h_1 u_1 + k_1 v_1 + l_1 w_1 = 0;$$

b) $$h_2 u_2 + k_2 v_2 + l_2 w_2 = h_2 \cdot \lambda_1 \cdot u_1 + k_2 \cdot \lambda_1 v_1 + l_2 \cdot \lambda_1 v_1 = 0;$$

ebenso c) $$h_3 u_3 + k_3 v_3 + l_3 w_3 = h_3 \cdot \mu_1 \cdot u_1 + k_3 \cdot \mu_1 \cdot v_1 + l_3 \cdot \mu_1 w_1 = 0.$$

Durch Addition von b) + c) = a) folgt

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= \lambda_1 h_2 + \mu_1 h_3 \\ k_1 &= \lambda_1 k_2 + \mu_1 k_3 \\ l_1 &= \lambda_1 l_2 + \mu_1 l_3 \end{aligned}\right\} . \qquad (7\,a)$$

Eine ähnliche Beziehung gilt umgekehrt für die Indizes einer jeden der beiden anderen Flächen, nämlich:

$$\begin{aligned} h_2 &= \lambda_2 h_1 + \mu_2 h_3 \\ k_2 &= \lambda_2 k_1 + \mu_2 k_3 \\ l_2 &= \lambda_2 l_1 + \mu_2 l_3 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \left.\begin{aligned} h_3 &= \lambda_3 h_1 + \mu_3 h_2 \\ k_3 &= \lambda_3 k_1 + \mu_3 k_2 \\ l_3 &= \lambda_3 l_1 + \mu_3 l_2 \end{aligned}\right\} . \qquad (7\,b)$$

Aus den Indizes zweier Flächen $(h_1 k_1 l_1)$ und $(h_2 k_2 l_2)$, welche eine Zone bestimmen, erhält man also auf einfache Weise beliebig viele Flächen dieser Zone, indem man die beiden gleichstelligen Indizes der zwei Flächen nach Multiplikation mit den einfachen rationalen Faktoren λ und μ addiert.

Beispiel: Die beiden gegebenen Flächen seien (111) und $(1\bar{1}1)$. Weitere Flächen ergeben sich für

$\lambda = 1;$	$\mu = 1,$	nämlich:	(101)
$\lambda = 1;$	$\mu = 2,$	»	$(3\bar{1}3)$
$\lambda = -1;$	$\mu = 2,$	»	$(1\bar{3}1)$
$\lambda = 2;$	$\mu = -1,$	»	(131) usw.

Aus dem Vorhergehenden ersieht man zugleich, daß man durch Addition oder Subtraktion zweier entsprechender Ziffern im Symbol zweier Flächen einer Zone eine neue Fläche dieser Zone ableiten kann. Man erhält in unserem Beispiele der Reihe nach:

$$\begin{pmatrix} 111 \\ 1\bar{1}1 \end{pmatrix} = (101)$$

$$\begin{pmatrix} 111 \\ 101 \end{pmatrix} = (212) \qquad \begin{pmatrix} 1\bar{1}1 \\ 101 \end{pmatrix} = (2\bar{1}2)$$

$$\begin{pmatrix} 101 \\ 212 \end{pmatrix} = (313) \qquad \begin{pmatrix} 101 \\ 2\bar{1}2 \end{pmatrix} = (3\bar{1}3)$$

$$\begin{pmatrix} 111 \\ 212 \end{pmatrix} = (323) \qquad \begin{pmatrix} 1\bar{1}1 \\ 2\bar{1}2 \end{pmatrix} = (3\bar{2}3) \text{ usw.}$$

Diese Beziehung zwischen den Flächen einer Zone ergibt sich aus folgendem: das Symbol der Zone sei $[uvw]$; zwei Flächen der Zone seien: $(h_1 k_1 l_1)$, $(h_2 k_2 l_2)$, also gelten die Gleichungen

$$h_1 u + k_1 v + l_1 w = 0$$
$$h_2 u + k_2 v + l_2 w = 0 .$$

Durch Addition beider Gleichungen erhält man offenbar eine neue Fläche

$$(h_1 + h_2)u + (k_1 + k_2)v + (l_1 + l_2)w = 0 ;$$

ihre Indizes $(h_3 k_3 l_3)$ sind also:

$$h_3 = h_1 + h_2$$
$$k_3 = k_1 + k_2$$
$$l_3 = l_1 + l_2 .$$

5. Bestimmung einer Kristallfläche durch zwei Zonen $[u_1 v_1 w_1]$ und $[u_2 v_2 w_2]$.

Zwei Zonen bestimmen zwei Richtungen in ihren Zonenachsen; durch diese beiden Geraden ist eine weitere Ebene eindeutig bestimmt. Für diese Ebene, welche sich als mögliche Kristallfläche (hkl) ergibt, gelten die beiden Gleichungen

$$hu_1 + kv_1 + lw_1 = 0$$

und

$$hu_2 + kv_2 + lw_2 = 0 .$$

Daraus folgt in analoger Abteilung, wie auf Seite 51 für x, y, z

$$\frac{h}{w_2 v_1 - v_2 w_1} = \frac{k}{u_2 w_1 - w_2 u_1} = \frac{l}{v_2 u_1 - v_1 u_2} ,$$

wobei die Differenzen der Produkte wieder nach folgendem Schema erhalten werden.

$$\begin{array}{c|ccccc|c} u_1 & v_1 & & w_1 & & u_1 & & v_1 & w_1 \\ & & \times & & \times & & \times & & \\ u_2 & v_2 & & w_2 & & u_2 & & v_2 & w_2 \\ \hline & w_2 v_1 - v_2 w_1 & & u_2 w_1 - w_2 u_1 & & v_2 u_1 - v_1 u_2 & & & \end{array}$$

Einen der Indizes kann man willkürlich wählen, etwa $l = v_2 u_1 - v_1 u_2$; dann werden die drei Indizes überhaupt

$$\begin{aligned} h &= w_2 v_1 - v_2 w_1 \\ k &= u_2 w_1 - w_2 u_1 \\ l &= v_2 u_1 - v_1 u_2 . \end{aligned} \tag{8}$$

Liegt also eine Kristallfläche in einer Zone mit zwei bekannten Flächen $(h_1 k_1 l_1)$ und $(h_2 k_2 l_2)$ und ferner in einer Zone mit zwei weiteren Flächen $(p_1 q_1 r_1)$ und $(p_2 q_2 r_2)$, dann erhält man das Symbol (hkl) durch wiederholte Anwendung der obigen schematischen Rechnung: Man bestimmt zuerst die beiden Innensymbole $[u_1 v_1 w_1]$ und $[u_2 v_2 w_2]$ und erhält daraus nach obigem (hkl).

6. Beziehung zwischen den Indizes und Winkeln von vier tautozonalen Flächen (rationales Doppelverhältnis).

In Fig. 57 sind P_1, P_2, P_4 die Pole dreier Flächen einer Zone, X bezeichnet eine Kristallachse. Es ergibt sich

$$\cos\alpha = \frac{\cos P_1X - \cos P_1P_2 \cdot \cos P_2X}{\sin P_1P_2 \cdot \sin P_2X}$$

und

$$-\cos\alpha = \frac{\cos P_4X - \cos P_2P_4 \cdot \cos P_2X}{\sin P_2P_4 \cdot \sin P_2X};$$

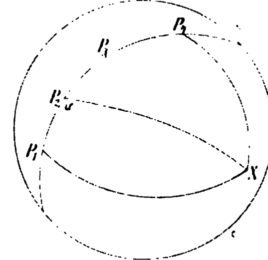


Fig. 57.

also

$$\sin P_2P_4 \cdot \cos P_1X + \sin P_1P_2 \cdot \cos P_4X = \cos P_2X$$

$$(\cos P_1P_2 \cdot \sin P_2P_4 + \cos P_2P_4 \cdot \sin P_1P_2) =$$
$$= \sin P_1P_4 \cos P_2X$$

und daraus nach Division durch $\sin P_2P_4$

$$\cos P_1X + \frac{\sin P_1P_2}{\sin P_2P_4}\cos P_4X = \frac{\sin P_1P_4}{\sin P_2P_4}\cos P_2X.$$

Eine zweite Gleichung erhält man analog für eine zweite Kristallachse, die Y-Axe:

$$\cos P_1Y + \frac{\sin P_1P_2}{\sin P_2P_4}\cos P_4Y = \frac{\sin P_1P_4}{\sin P_2P_4}\cos P_2Y.$$

Aus diesen beiden letzten Gleichungen ergibt sich das Verhältnis

$$\frac{\sin P_1P_2}{\sin P_2P_4} = \frac{\cos P_1Y \cdot \cos P_2X - \cos P_1X \cdot \cos P_2Y}{\cos P_4X \cdot \cos P_2Y - \cos P_4Y \cdot \cos P_2X}.$$

Eine ähnliche Beziehung ergibt sich durch Substitution für drei andere Flächen derselben Zone, P_1, P_3, P_4, nämlich

$$\frac{\sin P_1P_3}{\sin P_3P_4} = \frac{\cos P_1Y \cdot \cos P_3X - \cos P_1X \cdot \cos P_3Y}{\cos P_4X \cdot \cos P_3Y - \cos P_4Y \cdot \cos P_3X}.$$

Die Indizes der vier Flächen P_1, P_2, P_3, P_4 seien $(h_1k_1l_1)$, $(h_2k_2l_2)$, $(h_3k_3l_3)$, $(h_4k_4l_4)$. Nach den Substitionen

$$\cos P_1Y = \frac{ak_1}{bh_1}\cos P_1X$$

$$\cos P_2Y = \frac{ak_2}{bh_2}\cos P_2X$$

$$\cos P_3Y = \frac{ak_3}{bh_3}\cos P_3X$$

$$\cos P_4Y = \frac{ak_4}{bh_4}\cos P_4X$$

erhält man für die beiden Gleichungen

$$\frac{\sin P_1 P_2}{\sin P_2 P_4} = \frac{\cos P_1 X}{\cos P_4 X} \cdot \frac{h_4}{h_1} \cdot \frac{k_1 h_2 - h_1 k_2}{k_2 h_4 - h_2 k_4}$$

und

$$\frac{\sin P_1 P_3}{\sin P_3 P_4} = \frac{\cos P_1 X}{\cos P_4 X} \cdot \frac{h_4}{h_1} \cdot \frac{k_1 h_3 - h_1 k_3}{k_3 h_4 - h_3 k_4}.$$

Durch Division der beiden Gleichungen erhält man

$$\frac{\sin P_1 P_2}{\sin P_2 P_4} : \frac{\sin P_1 P_3}{\sin P_3 P_4} = \frac{k_1 h_2 - h_1 k_2}{k_2 h_4 - h_2 k_4} : \frac{k_1 h_3 - h_1 k_3}{k_3 h_4 - h_3 k_4} = A \qquad (9\,a)$$

oder

$$\frac{\sin P_1 P_2 \cdot \sin P_3 P_4}{\sin P_1 P_3 \cdot \sin P_2 P_4} = \frac{k_1 h_2 - h_1 k_2}{k_1 h_3 - h_1 k_3} \cdot \frac{k_3 h_4 - h_3 k_4}{k_2 h_4 - h_2 k_4} = A,$$

d. h. das Doppelverhältnis der Sinus der Winkel von vier Flächen einer Zone ist gleich einer rationalen Zahl. Dieses Doppelverhältnis läßt sich durch die Indizes der betreffenden Kristallflächen ausdrücken.

In der vorstehenden Gleichung berechnet sich der Wert des Doppelverhältnisses bloß aus den Indizes h und k der vier Flächen. Weitere Ausdrücke ergeben sich noch unter Benutzung der Kombination h und l, bzw. k und l.

Dies ergibt sich auf folgende Weise:

Nach Seite 53 existieren folgende Gleichungen:

1 a) $h_2 = \lambda_2 h_1 + \mu_2 h_4$	2 a) $h_3 = \lambda_3 h_1 + \mu_3 h_4$
1 b) $k_2 = \lambda_2 k_1 + \mu_2 k_4$	2 b) $k_3 = \lambda_3 k_1 + \mu_3 k_4$
1 c) $l_2 = \lambda_2 l_1 + \mu_2 l_4$	2 c) $l_3 = \lambda_3 l_1 + \mu_3 l_4$.

Durch einfache Umformung ergeben sich

aus 1 a) und 1 b)

und aus 2 a) und 2 b)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mu_2}{\lambda_2} &= \frac{h_2 k_1 - h_1 k_2}{k_2 h_4 - k_4 h_2} \\ \frac{\mu_3}{\lambda_3} &= \frac{h_3 k_1 - h_1 k_3}{k_3 h_4 - h_3 k_4} \end{aligned}\right\} \frac{\mu_2}{\lambda_2} : \frac{\mu_3}{\lambda_3} = A; \qquad (1)$$

ebenso aus 1 a) und 1 c)

und aus 2 a) und 2 c)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mu_2}{\lambda_2} &= \frac{h_2 l_1 - h_1 l_2}{l_2 h_4 - l_4 h_2} \\ \frac{\mu_3}{\lambda_3} &= \frac{h_3 l_1 - h_1 l_3}{l_3 h_4 - h_3 l_4} \end{aligned}\right\}; \qquad (2)$$

ferner aus 1 b) und 1 c)

und aus 2 b) und 2 c)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mu_2}{\lambda_2} &= \frac{k_2 l_1 - k_1 l_2}{l_2 k_4 - l_4 k_2} \\ \frac{\mu_3}{\lambda_3} &= \frac{k_3 l_1 - k_1 l_3}{l_3 k_4 - l_4 k_3} \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

Zur Berechnung des Wertes A des Doppelverhältnisses $\frac{\sin P_1P_2}{\sin P_2P_4} : \frac{\sin P_1P_3}{\sin P_3P_4}$ hat man also die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{h_2k_1 - h_1k_2}{k_2h_4 - k_4h_2} : \frac{h_3k_1 - h_1k_3}{k_3h_4 - h_3k_4} \\ &= \frac{h_2l_1 - h_1l_2}{l_2h_4 - l_4h_2} : \frac{h_3l_1 - h_1l_3}{l_3h_4 - h_3l_4} \\ &= \frac{k_2l_1 - k_1l_2}{l_2k_4 - l_4k_2} : \frac{k_3l_1 - k_1l_3}{l_3k_4 - l_4k_3} \end{aligned}\right\} . \qquad (9\,b)$$

Man hat zur Berechnung die Wahl zwischen drei Beziehungen, was deswegen von Bedeutung ist, weil die eine oder andere Gleichung den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ liefern kann.

Ferner achte man auf die Reihenfolge der Pole. Der Wert A wird bei dieser Form (Fig. 57) des Verhältnisses positiv.

Anwendung in der Kristallberechnung.

Die Formel für die rationalen Doppelverhältnisse findet eine ausgedehnte Anwendung in der Kristallberechnung.

Es werden mit ihrer Hilfe zwei Aufgaben gelöst, welche eine bekannte Zone darbieten kann. Diese Aufgaben sind:

a) Für vier bekannte Flächen einer Zone sind zwei aufeinander folgende Winkel gegeben; gesucht ist der dritte Winkel (Berechnung der Winkel zwischen den Flächenpolen einer Zone).

Zur Vereinfachung der Rechnung wird obige Formel in folgender Weise weiter entwickelt.

$$\frac{\sin P_1P_2 \cdot \sin P_3P_4}{\sin P_1P_3 \cdot \sin P_2P_4} = \frac{\sin P_1P_2 \cdot \sin (P_1P_4 - P_1P_3)}{\sin P_1P_3 \cdot \sin (P_1P_4 - P_1P_2)} =$$

$$= \frac{\sin P_1P_4 \cdot \operatorname{cotg} P_1P_3 - \cos P_1P_4}{\sin P_1P_4 \cdot \operatorname{cotg} P_1P_2 - \cos P_1P_4} = \frac{\operatorname{cotg} P_1P_3 - \operatorname{cotg} P_1P_4}{\operatorname{cotg} P_1P_2 - \operatorname{cotg} P_1P_4} = A;$$

also

$$A \operatorname{cotg} P_1P_2 - \operatorname{cotg} P_1P_3 - (A - 1) \operatorname{cotg} P_1P_4 = 0. \qquad (10)$$

Aus dieser Formel ersieht man, daß sämtliche Winkel einer Zone berechnet werden können, wenn zwei aufeinander folgende Winkel in dieser Zone gegeben sind.

A ergibt sich hierbei aus einem der obigen Verhältnisse (9 b); die Rechnung ist einfach bei Anwendung einer Tabelle der natürlichen trigonometrischen Zahlen.

Die folgende Aufgabe ist die Umkehrung der eben behandelten:

b) Gegeben für vier Flächen einer Zone die drei aufeinander folgenden unabhängigen Winkel und die Indizes dreier Flächen $(h_1k_1l_1)$, $(h_2k_2l_2)$ und $h_3k_3l_3)$; gesucht ist das Symbol der vierten Fläche $(h_4k_4l_4)$.

Aus Gleichung (10) kann man A unmittelbar berechnen. Aus den Beziehungen auf Seite 57 folgt dann weiter

$$\frac{k_3 h_1 - h_3 k_1}{k_2 h_1 - k_1 h_2} = A \cdot \frac{h_3 k_1 - h_1 k_3}{h_2 k_1 - h_1 k_2} = A_1$$

ferner

$$\left.\frac{l_3 h_1 - h_3 l_1}{l_2 h_1 - l_1 h_2} = A \cdot \frac{h_3 l_1 - h_1 l_3}{h_2 l_1 - h_1 l_2} = A_1\right\} . \qquad (11a)$$

und

$$\frac{l_3 k_1 - l_1 k_3}{l_2 k_1 - l_1 k_2} = A \cdot \frac{k_3 l_1 - k_1 l_3}{k_2 l_1 - k_1 l_2} = A_1$$

Die Gleichheit der drei Ausdrücke auf der linken Seite der drei Gleichungen ergibt sich aus einem System von Gleichungen $h_1 = \lambda h_2 + \mu h_3$ in Analogie mit Seite 53. Aus dem gleichen Grunde (Umkehrung) ergibt sich dann

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= A_1 h_2 + h_3 \\ k_1 &= A_1 k_2 + k_3 \\ l_1 &= A_1 l_2 + l_3 \end{aligned}\right\} . \qquad (11b)$$

Zur Ermittlung von A_1 stehen wieder drei Ausdrücke zur Verfügung.

Beispiel. Kupfervitriol: Gegeben in der Zone [001]: $(1\bar{1}0):(100) = 31^\circ 9'$ $(h_1 k_1 l_1) = (1\bar{1}0)$
$(110):(100) = 26^\circ 7'$ $(h_2 k_2 l_2) = (100)$
$(100):\ x = 741^\circ 52'$ $(h_3 k_3 l_3) = (110)$

$$A \operatorname{cotg} 31^\circ 9' - \operatorname{cotg} 57^\circ 16' - (A - 1) \operatorname{cotg} 73^\circ 1' = 0$$

$$A = \frac{\operatorname{cotg} 57^\circ 16' - \operatorname{cotg} 73^\circ 1'}{\operatorname{cotg} 31^\circ 9' - \operatorname{cotg} 73^\circ 1'} = \frac{0,640 - 0,305}{1,665 - 0,305} = \frac{0,335}{1,360} = \frac{1}{4} .$$

Also

$$A_1 = \frac{-1-1}{-1-0} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} .$$

Folglich:

$$h_1 = -\frac{1}{2} \cdot 1 + 1 = \frac{1}{2}$$

$$k_1 = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 1 = 1 ; \text{ also } x = (120).$$

$$l_1 = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 0 = 0.$$

Sind dagegen die Indizes einer Fläche zwischen den gegebenen Flächen $(h_1 k_1 l_1)$ und $(h_4 k_4 l_4)$ gesucht, etwa $(h_2 k_2 l_2)$, dann erhält man deren relativen Wert durch direkte Umkehrung der Gleichungen auf Seite 53, nämlich

$$\begin{aligned} h_2 &= h_1 + A_2 h_4 \\ k_2 &= k_1 + A_2 k_4 \\ l_2 &= l_1 + A_2 l_4 ; \end{aligned} \qquad (11b')$$

dabei ist

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= A \cdot \frac{h_3 k_1 - h_1 k_3}{k_3 h_4 - h_3 k_4} \\ &= A \cdot \frac{h_3 l_1 - h_1 l_3}{l_3 h_4 - h_3 l_4} \\ &= A \cdot \frac{k_3 l_1 - k_1 l_3}{l_3 k_4 - l_4 k_3} \end{aligned}\right\} . \qquad (11a')$$

Ganz analog sind die Gleichungen, wenn $(h_3 k_3 l_3)$ gesucht ist.

Beispiel. Kupfervitriol: Gegeben in der Zone [100]

$$(h_1 k_1 l_1) = (021) \qquad -(021): x = 20^0 19'$$
$$(h_3 k_3 l_3) = (001) \qquad -(021):(001) = 49^0 50'$$
$$(h_4 k_4 l_4) = (0\bar{1}1) \qquad -(001):(0\bar{1}1) = 27^0 28'$$

$$A \operatorname{cotg} 20^0 19' - \operatorname{cotg} 49^0 50' - (A-1) \operatorname{cotg} 77^0 18' = 0$$

also

$$A = \frac{\operatorname{cotg} 49^0 50' - \operatorname{cotg} 77^0 18'}{\operatorname{cotg} 20^0 19' - \operatorname{cotg} 77^0 18'} = \frac{0{,}8744 - 0{,}2253}{2{,}7000 - 0{,}2253} = \frac{0{,}6491}{2{,}4747} = \frac{1}{4};$$

folglich

$$A_2 = \frac{-2}{-1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2};$$

$$h_2 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

$$k_2 = 2 + \frac{1}{2} \cdot -1 = \frac{3}{2}; \text{ also } x = (011)$$

$$l_2 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

Anhang: **Zonen, welche durch einen einzigen Winkel bestimmt sind.**

In Klassen mit hinreichenden Symmetrieelementen kommen Zonen vor, deren zugehöriger Pol einer rationalen Kristallfläche entspricht. Alle Zonen durch letzteren Pol sind durch einen einzigen Winkel bestimmt. Für die Berechnung der Indizes, bzw. Winkel in solchen Zonen ergeben sich aus der Cosinusformel besonders einfache Beziehungen. Solche Zonen in den einzelnen Systemen sind:

Monoklines System: Alle Zonen durch {010} sind durch einen einzigen Winkel bestimmt. Die speziellen Gleichungen sind:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Zone } [100]: & \frac{q_1}{r_1} \cdot \operatorname{tg}(010):(oq_1r_1) = \frac{q_2}{r_2} \cdot \operatorname{tg}(010):(oq_2r_2) \\ \text{Zone } [001]: & \frac{q_1}{p_1} \cdot \operatorname{tg}(010):(p_1q_1o) = \frac{q_2}{p_2} \cdot \operatorname{tg}(010):(p_2q_2o) \\ \text{Beliebige Zone durch } \{010\}: & \frac{q_1}{p_1} \cdot \operatorname{tg}(010):(p_1q_1r) = \frac{q_2}{p_2} \cdot \operatorname{tg}(010):(p_2q_2r_2) \\ & \text{und } \frac{p_1}{r_1} = \frac{p_2}{r_2} \end{array}\right\} \quad (12)$$

Rhombisches System. Alle Zonen durch {100}, durch {010} und {001} sind durch einen einzigen Winkel bestimmt. Die speziellen Gleichungen sind:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Zone } [100]: & \text{Wie im monoklinen System} \\ \text{Zone } [001]: & \text{Wie im monoklinen System} \\ \text{Zone } [010]: & \frac{r_1}{p_1}\cdot \operatorname{tg}(001):(p_1 o r_1) = \frac{r_2}{p_2}\cdot \operatorname{tg}(001):(p_2 o r_2) \\ \text{Beliebige Zone durch } \{010\}: & \text{Wie im monoklinen System} \\ \text{Beliebige Zone durch } \{001\}: & \left.\begin{array}{l} \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} \\ \frac{r_1}{q_1}\cdot \operatorname{tg}(001):(p_1 q_1 r_1) = \frac{r_2}{q_2}\cdot \operatorname{tg}(001):(p_2 q_2 r_2) \end{array}\right\} \\ \text{Beliebige Zone durch } \{100\}: & \left.\begin{array}{l} \frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2} \\ \frac{p_1}{r_1}\cdot \operatorname{tg}(100):(p_1 q_1 r_1) = \frac{p_2}{r_2}\cdot \operatorname{tg}(100):(p_2 q_2 r_2) \end{array}\right\} \end{array}\right\} \cdot \quad (13)$$

Tetragonales System. Jede beliebige Zone des tetragonalen Systems ist durch einen einzigen Winkel bestimmt. Denn zu jedem Pole in der Prismenzone, also auch zu jenem Flächenpol, welchen unsere beliebige Zone mit der Prismenzone gemeinsam hat, gehört eine dazu senkrechte rationale Zone (siehe Fig. 72, S. 91). Die speziellen Gleichungen sind:

Für die Zonen durch {100}, durch {010} und durch {001} gelten dieselben Gleichungen wie im rhombischen System.

Für eine beliebige Zone ergibt sich durch Umformung aus der Cosinusformel:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{p h_1 - q g_1}{k_1} = \frac{p h_2 - q g_2}{k_2} \text{ und} \\ \frac{p g_1 + q h_1}{k_1}\cdot \operatorname{tg}(pqo):(g_1 h_1 k_1) = \frac{p g_2 + q h_2}{k_2}\cdot \operatorname{tg}(pqo):(g_2 h_2 k_2) \end{array}\right\} \cdot \quad (14)$$

Die zweite Gleichung allein reicht aus zur Berechnung des zweiten Winkels, wenn der erste gegeben ist. Aus beiden Gleichungen zusammen können die Indizes einer zweiten Fläche, etwa $(g_2 h_2 k_2)$ bestimmt werden, wenn zwei Winkel gemessen sind; man setzt dabei willkürlich $k_2 = 1$.

Trigonales System. Auch im trigonalen System ist jede beliebige Zone durch einen einzigen Winkel bestimmt. Die Formel für eine beliebige Zone ist

$$\frac{p g_1 + q h_1 + r k_1}{g_1 + h_1 + k_1}\cdot \operatorname{tg}(pqr):(g_1 h_1 k_1) = \frac{p g_2 + q h_2 + r k_2}{g_2 + h_2 + k_2}\cdot \operatorname{tg}(pqr):(g_2 h_2 k_2), \quad (15)$$

wobei $(g_1 h_1 k_1)$ und $(g_2 h_2 k_2)$ zwei Pole in einer beliebigen Zone und (pqr) deren Schnittpunkt mit der vertikalen Prismenzone [111] sind.

Hieraus kann man jeden Winkel $(pqr):(g_2 h_2 k_2)$ berechnen, wenn in der Zone ein Winkel $(pqr):(q_1 h_1 k_1)$ gegeben ist.

Umgekehrt liefern zwei solche Winkel das unbekannte Flächensymbol $(h_2 k_2 l_2)$, mit Rücksicht auf Gleichung 7 (Seite 52).

Für die vertikale trigonale Hauptzone [111] gilt:

$$\mathrm{tg}(2\bar{1}\bar{1}):(g_1 h_1 k_1) = \sqrt{3}\cdot\frac{h_1 - k_1}{2g_1 - h_1 - k_1}. \qquad (15a)$$

Hexagonales System. Auch hier ist eine beliebige Zone durch einen einzigen Winkel bestimmt. Durch Umformung folgt aus dem Cosinussatz die spezielle Gleichung

$$\frac{pg_1+qh_1+rk_1}{l_1}\cdot\mathrm{tg}(pqro):(g_1h_1k_1l_1) = \frac{pg_2+qh_2+rk_2}{l_2}\cdot\mathrm{tg}(pqro):(g_2h_2k_2l_2), \qquad (16)$$

wobei $(g_1 h_1 k_1 l_1)$ und $(g_2 h_2 k_2 l_2)$ zwei Pole einer beliebigen Zone und $(pqro)$ deren Schnittpunkt mit der vertikalen Prismenzone ist. Zur Berechnung der Indizes $(g_2 h_2 k_2 l_2)$ benötigt man noch die Gleichung:

$$g_2 l_1 q - h_2 l_1 p + l_2(h_1 p - g_1 q) = 0$$

und die bekannte Beziehung im hexagonalen System $g + h + k = 0$.

Für die Zonen durch (0001) ergibt sich:

$$\frac{s_1}{r_1}\cdot\mathrm{tg}(0001):(p_1q_1r_1s_1) = \frac{s_2}{r_2}\cdot\mathrm{tg}(0001):(p_2q_2r_2s_2) \qquad (16a)$$

und für die vertikale Prismenzone

$$\frac{p_1 - r_1}{q_1}\cdot\mathrm{tg}(10\bar{1}0):(p_1q_1r_1o) = \frac{p_2 - r_2}{q_2}\cdot\mathrm{tg}(10\bar{1}0):(p_2q_2r_2o). \qquad (16b)$$

Konstruktive Lösung der Aufgaben über das rationale Doppelverhältnis.

Den Wert des Doppelverhältnisses $\frac{\sin P_1 P_2}{\sin P_1 P_3}:\frac{\sin P_2 P_4}{\sin P_3 P_4} = A$ kann man auf einfachem Wege durch Konstruktion erhalten. In Fig. 58 sind vier Flächennormale OP_1, OP_2, OP_3, OP_4 gezeichnet. Die Winkel seien $P_1 OP_2 = P_1 P_2$, $P_1 OP_3 = P_1 P_3$ usw. Die Sinus dieser Winkel verhalten sich wie die entsprechenden Teilstrecken einer beliebigen Geraden, welche die vier Strahlen schneidet: also

$$\frac{\sin P_1 P_2}{\sin P_1 P_3}:\frac{\sin P_2 P_4}{\sin P_3 P_4} = \frac{P_1 P_2}{P_1 P_3}:\frac{P_2 P_4}{P_3 P_4} = A.$$

Dasselbe gilt für eine Gerade parallel dem vierten Strahle OP_4; in diesem Falle wird $\frac{p_2 p_4}{p_3 p_4} = 1$; also ist

$$A = \frac{p_1 p_2}{p_1 p_3}.$$

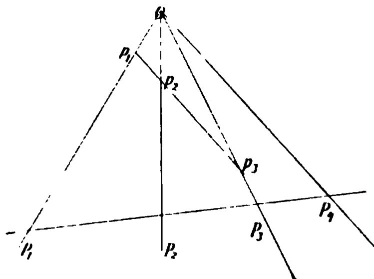


Fig. 58.

Um A zu erhalten zieht man die Parallele zum vierten Strahl OP_4 und mißt die Strecken $p_1 p_2$ und $p_1 p_3$; der Quotient der beiden Werte liefert A.

Dieses ermöglicht die konstruktive Lösung der beiden Hauptaufgaben des rationalen Doppelverhältnisses:

a) Gegeben sind die Winkel von vier aufeinander folgenden Polen und die Indizes von dreien; gesucht die Indizes des vierten Poles.

Man zeichnet, am besten mit Hilfe des Grundkreises des Wulffschen Netzes auf etwas durchsichtigem Papier, von einem Mittelpunkt O aus die vier Strahlen unter ihren Neigungswinkeln (Fig. 58) und zum vierten Strahl OP_4 beliebig die Parallele $p_1p_2p_3p_4$ und ermittelt mit einem Millimeterstab das Verhältnis $\frac{p_1p_2}{p_2p_3} = A$. Daraus berechnet man nach Seite 58 A_1 und daraus die Indizes.

Beispiel: Zone [100 : 001] der γ-Modifikation von Kaliumdijodat[1]) (Fig. 59)

Beob.	$(001):(101) = 50^\circ 32'$	$(001):x_3 = 33^\circ 49'$
	$(001):(100) = 81^\circ 15'$	$(001):x_4 = 31^\circ 31'$
	$(001):\ x_1 = 43^\circ 42'$	$(001):x_5 = 40^\circ 10'$
	$(001):\ x_2 = 38^\circ 14'$	$(001):x_6 = 62^\circ 44'$

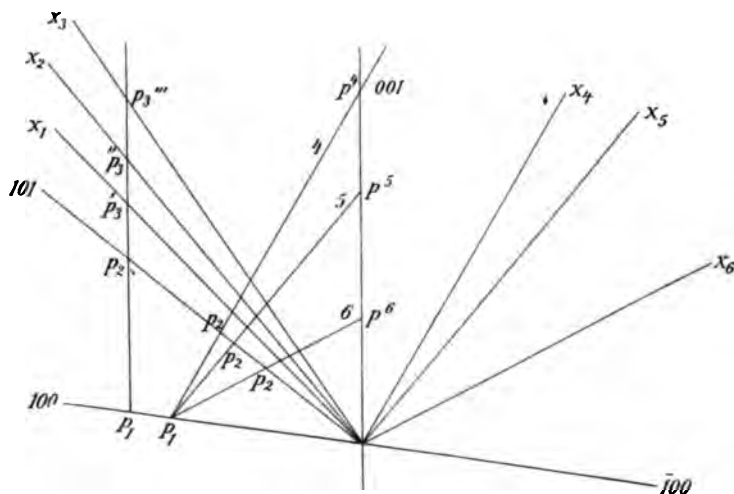


Fig. 59.

Um zuerst x_1, x_2 und x_3 zu finden ziehe man die Parallele zum Strahl (001) und erhalte für

$$x_1:\ \frac{p_1p_2}{p_1p_3'} = \frac{3}{4},\quad x_2:\ \frac{p_1p_2}{p_1p_3''} = \frac{3}{5},\quad x_3:\ \frac{p_1p_2}{p_1p_3'''} = \frac{1}{2};$$

also

$$A' = \frac{3}{4};\quad A'' = \frac{3}{5};\quad A''' = \frac{1}{2};$$

daraus nach Seite 58

$$A_1' = \frac{3}{4},\quad A_1'' = \frac{3}{5},\quad A_1''' = \frac{1}{2};$$

also

$$x_1 = (304),\quad x_2 = (305),\quad x_3 = (102).$$

1) P. Groth, Chemische Krystallographie. 1908. 2. 145.

Um die Indizes von x_4, x_5, x_6 zu finden, zieht man zu jedem Strahl die Parallele etwa zu x_4 die Gerade 4 usw. Die Messung ergibt

$$A^{(4)} = \frac{3}{11}, \qquad A^{(5)} = \frac{1}{3}, \qquad A^{(6)} = \frac{1}{2};$$

daraus nach Seite 58

$$A_1^{(4)} = \frac{3}{11}, \qquad A_1^{(5)} = \frac{1}{3}, \qquad A_1^{(6)} = \frac{1}{2};$$

also

$$x_4 = (\bar{3}08), \qquad x_5 = (\bar{1}02), \qquad x_6 = (\bar{1}01).$$

b) Gegeben sind die Indizes von vier Flächen einer Zone und dazu zwei aufeinander folgende Winkel; gesucht der dritte Winkel.

Man berechne aus den Indizes den Wert A des rationalen Doppelverhältnisses (Seite 57). Sind die beiden Winkel so gegeben, daß die äußeren Strahlen OP_1 und OP_4 neben einem inneren, z. B. OP_3, bestimmt sind, dann ziehe (Fig. 60) man zu OP_4 die Parallele p_1p_3 und teile sie im Verhältnis $\frac{p_1p_2}{p_1p_3} = A$; die Gerade Op_2 bestimmt dann die Richtung der vierten Flächennormalen; den gesuchten Winkel kann man direkt messen.

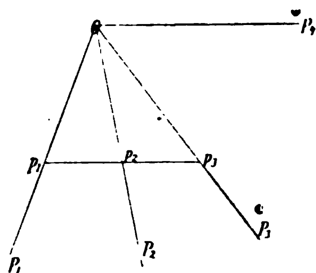


Fig. 60.

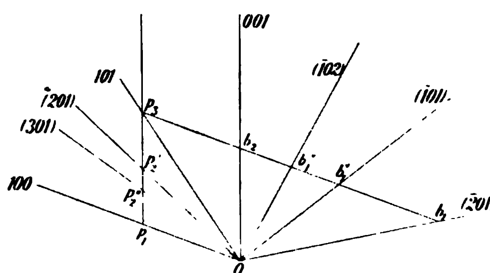


Fig. 61.

Ist ein äußerer Strahl unbestimmt, z. B. OP_4, so liefert der erste immer noch die Richtung der Parallelen, wobei jedoch nötigenfalles die Reihenfolge der Flächenpole umzukehren ist.

Beispiel: Zone [100 : 001] bei ½-basisches Merkuronitrat[1]) (Fig. 61).

Gegeben: (100) : (001) = 69° 1½′; (001) : (101) = 33° 1′.

Gesucht: (001) : (201), (001) : (301), (001) : ($\bar{1}$02), (001) : ($\bar{1}$01), (001) : ($\bar{2}$01).

Für (201) ist $A = \frac{1}{2}$; für (301) ist $A = \frac{1}{3}$. Man ziehe also die Parallele zur Normalen (001) und mache $\frac{p_1p_2'}{p_1p_3} = \frac{1}{2}$ und $\frac{p_1p_2''}{p_1p_3} = \frac{1}{3}$; dann ist Op_2' die Richtung von (201) und Op_2'' für (301); den Winkel (001) : (201) = 46°, bzw. (001) : (301) = 52½° kann man direkt messen.

1) Groth, l. c. S. 97.

Um ($\bar{1}02$), ($\bar{1}01$) und ($\bar{2}01$) einzutragen, ziehe man jetzt $p_3 b$ parallell der Richtung für (100) und achte nun genau auf die umgekehrte Reihenfolge der Flächen; dann ist für

$$(\bar{2}01):\quad A = \frac{2}{3},\ \text{also}\ \frac{b_1 b_2}{b_1 p_3} = \frac{2}{3};$$

$$(\bar{1}01):\quad A = \frac{1}{2},\ \text{also}\ \frac{b_1' b_2}{b_1' p_3} = \frac{1}{2};$$

$$(\bar{1}02):\quad A = 3,\ \text{also}\ \frac{b_1'' b_2}{b_1'' p_3} = \frac{1}{3}.$$

Man trage die entsprechenden Strecken auf $p_3 b$ ab und erhält dann die Richtungen für ($\bar{2}01$), ($\bar{1}01$) und ($\bar{1}02$) und kann die Winkel messen, nämlich

$$(001):(\bar{2}01) = 79^\circ$$
$$(001):(\bar{1}01) = 52^\circ$$
$$(001):(\bar{1}02) = 27\tfrac{1}{2}^\circ.$$

7. Transformation der Indizes.

Die Indizes der Flächen eines beliebigen Komplexes sind bestimmt auf Grund der getroffenen Auswahl der Grundflächen und der durch sie bedingten Elemente des Kristalles. Trifft man eine andere Wahl der Grundflächen, dann werden auch die Indizes jeder weiteren Fläche des Komplexes andere. Man erhält so, je nach der Wahl der Grundlagen, für einen Flächenkomplex verschiedene Systeme von Symbolen. Den Übergang von einem System zu einem anderen bezeichnet man als Transformation der Indizes.

Die allgemeinste Aufgabe der Transformation der Indizes kommt vorwiegend beim triklinen System vor, weil in der Wahl der Aufstellung eines Kristalles auch der höchste Grad von Freiheit besteht. In den übrigen Systemen spezialisieren sich mit zunehmenden Graden der Symmetrie die Aufgaben der Transformation.

Wir wollen bei der Transformation der Indizes folgende Aufgaben unterscheiden:

1. Allgemeinste Aufgabe: Die gegebenen Symbole eines Flächenkomplexes sind in ein neues System zu transformieren; erforderlich hierzu ist, daß von vier Flächen, wovon nicht drei in einer Zone liegen, die Indizes auch für das neue System willkürlich und nach Bedarf vorher festgesetzt werden.

Diese allgemeinste Art der Transformation kommt bei der eigentlichen Kristallberechnung wohl selten vor; darum sei auf die hierbei geltenden Transformationsgleichungen, welche Th. Liebisch (Geometrische Kristallographie, Leipzig 1798) und B. Hecht (Anleitung zur Kristallberechnung, Leipzig 1893) abgeleitet haben, verwiesen.

Häufiger sind einige speziellere Aufgaben, nämlich:

2. Der Flächenkomplex ist auf ein neues Achsenkreuz und ein neues Achsenverhältnis zu beziehen, d. h. die drei Zonen $[u_1 v_1 w_1]$, $[u_2 v_2 w_2]$ und

$[u_3 v_3 w_3]$ des alten Systems sollen im neuen System [100], [010] und [001] werden, ferner eine Fläche $(h_2 k_2 l_2)$ zu $(h_2' k_2' l_2')$; gesucht die Indizes einer beliebigen Fläche $(h_1 k_1 l_1)$ des alten Systems nach der Transformation.

Für diese Art der Transformation erhält man einfache Gleichungen auf folgende Weise:

den Ausdruck $A = \frac{h_2 k_1 - h_1 k_2}{h_3 k_1 - h_1 k_3} : \frac{k_2 h_4 - k_4 h_2}{k_3 h_4 - h_3 k_4}$

wenden wir auf die Zone $(x_1 y_1 z_1)$, $(h_1 k_1 l_1)$, $(h_2 k_2 l_2)$, $(x_2 y_2 z_2)$ an und erhalten also

$$A = \frac{h_1 y_1 - k_1 x_1}{h_2 y_1 - k_2 x_1} : \frac{k_1 x_2 - h_1 y_2}{k_2 x_2 - h_2 y_2}.$$

Nun sei $(x_1 y_1 z_1)$ nicht direkt gegeben, sondern bestimme sich durch die beiden Zonen $[u_1 v_1 w_1]$ und $[h_1 k_1 l_1,\ h_2 k_2 l_2] = [hkl]$.

Es wird also

$$\frac{h_1 y_1 - k_1 x_1}{h_2 y_1 - k_2 x_1} = \frac{h_1 (hw_1 - lu_1) - k_1 (lv_1 - kw_1)}{h_2 (hw_1 - lu_1) - k_2 (lv_1 - kw_1)}$$

$$= \frac{h_1 l_2 k_1 w_1 - h_1 k_2 l_1 w_1 - h_1 k_2 h_1 u_1 + h_1 h_2 k_1 u_1 - k_1 k_2 h_1 v_1 + k_1 h_2 k_1 v_1 + k_1 h_2 l_1 w_1 - k_1 l_2 h_1 w_1}{h_2 l_2 k_1 w_1 - h_2 k_2 l_1 w_1 - h_2 k_2 h_1 u_1 + h_2 h_2 k_1 u_1 - k_2 k_2 h_1 v_1 + k_2 h_2 k_1 v_1 + k_2 h_2 l_1 w_1 - k_2 l_2 h_1 w_1}$$

$$= \frac{u_1 h_1 (h_2 k_1 - k_2 h_1) + v_1 k_1 (h_2 k_1 - k_2 h_1) + w_1 l_1 (h_2 k_1 - k_2 h_1)}{u_1 h_2 (h_2 k_1 - k_2 h_1) + v_1 k_2 (h_2 k_1 - k_2 h_1) + w_1 l_2 (h_2 k_1 - k_2 h_1)}$$

$$= \frac{h_1 u_1 + k_1 v_1 + l_1 w_1}{h_2 u_1 + k_2 v_1 + l_2 w_1}.$$

Ein analoger Ausdruck ergibt sich für $\frac{k_1 x_2 - h_1 y_2}{k_2 x_2 - h_2 y_2}$, wenn (x_2, y_2, z_2) bestimmt ist durch die beiden Zonen $[u_2 v_2 w_2]$ und $[hkl]$.

Schließlich erhält man

$$A_{(1,2)} = \frac{h_1 u_1 + k_1 v_1 + l_1 w_1}{h_2 u_1 + k_2 v_1 + l_2 w_1} : \frac{h_1 u_2 + k_1 v_2 + l_1 w_2}{h_2 u_2 + k_2 v_2 + l_2 w_2}.$$

Setzt man statt $[u_2 v_2 w_2]$ eine andere Zone $[u_3 v_3 w_3]$, dann ist

$$A_{(1,3)} = \frac{h_1 u_1 + k_1 v_1 + l_1 w_1}{h_2 u_1 + k_2 v_1 + l_2 w_1} : \frac{h_1 u_3 + k_1 v_3 + l_1 w_3}{h_2 u_3 + k_2 v_3 + l_2 w_3}.$$

Jeder der beiden Ausdrücke $A_{(1,2)}$ und $A_{(1,3)}$ enthält die Indizes einer ausreichenden Flächenzahl eines Komplexes. Man kann sie nun zur Ermittelung der Transformationsgleichungen für folgenden allgemeinen Fall benutzen:

Die Symbole der ursprünglichen Aufstellung seien:

$[u_1 v_1 w_1]$,	bestimmt durch zwei Flächen	$(e_1 f_1 g_1)$ und	$(e_3 f_3 g_3)$
$[u_2 v_2 w_2]$,	» » » »	$(e_2 f_2 g_2)$ »	$(e_3 f_3 g_3)$
$[u_3 v_3 w_3]$,	» » » »	$(e_1 f_1 g_1)$ »	$(e_2 f_2 g_2)$
$h_1 k_1 l_1$			
$h_2 k_2 l_2$			

Nach der Transformation werde

$$[u_1 v_1 w_1] \rightarrow [100]$$
$$[u_2 v_2 w_2] \rightarrow [010]$$
$$[u_3 v_3 w_3] \rightarrow [001],$$
$$h_2 k_2 l_2 \rightarrow h_2' k_2' l_2',$$

gesucht ist das neue Symbol $(h_1' k_1' l_1')$ für die ursprüngliche Fläche $(h_1 k_1 l_1)$.

Für $A_{(1,2)}$ und ebenso $A_{(1,3)}$ erhält man zwei Ausdrücke, den einen für die alte, den anderen für die neue Aufstellung, nach Einsetzen der entsprechenden Symbole; es ist also

$$A_{(1,2)} = \frac{h_1 u_1 + k_1 v_1 + l_1 w_1}{h_2 u_1 + k_2 v_1 + l_2 w_1} : \frac{h_1 u_2 + k_1 v_2 + l_1 w_2}{h_2 u_2 + k_2 v_2 + l_2 w_2} = \frac{h_1'}{h_2'} : \frac{k_1'}{k_2'}$$

und

$$A_{(1,3)} = \frac{h_1 u_1 + k_1 v_1 + l_1 w_1}{h_2 u_1 + k_2 v_1 + l_2 w_1} : \frac{h_1 u_3 + k_1 v_3 + l_1 w_3}{h_2 u_3 + k_2 v_3 + l_2 w_3} = \frac{h_1'}{h_2'} : \frac{l_1'}{l_2'};$$

daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{h_1'}{h_2'} &= \frac{h_1 u_1 + k_1 v_1 + l_1 w_1}{h_2 u_1 + k_2 v_1 + l_2 w_1} \\ \frac{k_1'}{k_2'} &= \frac{h_1 u_2 + k_1 v_2 + l_1 w_2}{h_2 u_2 + k_2 v_2 + l_2 w_2} \\ \frac{l_1'}{l_2'} &= \frac{h_1 u_3 + k_1 v_3 + l_1 w_3}{h_2 u_3 + k_2 v_3 + l_2 w_3} \end{aligned} \qquad (17)$$

Man kann hieraus $(h_1' k_1' l_1')$ berechnen, wenn die übrigen Indizes gegeben sind

Beispiel[1]): Die trikline Kombination (100), (110), ($1\bar{1}1$), ($5\bar{1}\bar{1}$), ($3\bar{1}0$), ($20\bar{1}$), (112), (001), (021), ($71\bar{1}$), ($1\bar{1}0$), ($60\bar{1}$) werde in folgender Weise transformiert:

vor der Transformation	nach der Transformation
(110)	(010)
($3\bar{1}0$)	(100)
(001)	(001)
($1\bar{1}1$)	($1\bar{1}1$).

Es ist also

$$[u_1 v_1 w_1] = [1\bar{1}0]$$
$$[u_2 v_2 w_2] = [130]$$
$$[u_3 v_3 w_3] = [001].$$

Die Transformationsgleichungen werden:

$$h_1' = \frac{h_1 - k_1}{2},$$
$$k_1' = \frac{h_1 + 3k_1}{2},$$
$$l_1' = l_1.$$

Also gehen die übrigen Symbole über

(100) in (110)		(021) in ($\bar{1}31$)	
($5\bar{1}\bar{1}$) » ($31\bar{1}$)		($71\bar{1}$) » ($35\bar{1}$)	
($20\bar{1}$) » ($11\bar{1}$)		($1\bar{1}0$) » ($1\bar{1}0$)	
(112) » (011)		($60\bar{1}$) » ($33\bar{1}$).	

1) B. Hecht, Anleitung zur Kristallberechnung. Leipzig 1893, S. 61.

Die eben behandelte Art der Transformation kommt am ehesten in Frage beim triklinen System, etwas spezialisiert auch bei anderen Systemen (monoklin, trigonal, hexagonal oder tetragonal).

Bei diesen letzteren Systemen besteht die häufigste Änderung in einer anderen Wahl des Achsenverhältnisses bei gleichbleibenden Achsenrichtungen. Dies liefert, abgesehen von einer einfachen Vertauschung der Achsen, den einfachsten Fall einer Transformation, nämlich

3. Transformation der Indizes nach einfacher Änderung des Achsenverhältnisses, d. h. eine Fläche (hkl) des alten Systems werde zu (111) im neuen; gesucht das neue Symbol $(e_1 f_1 g_1)$ der alten Fläche (efg).

Ist $a:b:c$ das ursprüngliche Achsenverhältnis, $a_1:b_1:c_1$ das neue, dann ist

$$\frac{a}{h} = a_1; \quad \frac{b}{k} = b_1; \quad \frac{c}{l} = c_1;$$

und ebenso

$$\frac{a}{e} = \frac{a_1}{e_1}; \quad \frac{b}{f} = \frac{b_1}{f_1}; \quad \frac{c}{g} = \frac{c_1}{g_1};$$

also

$$e_1 = \frac{e}{h}; \quad f_1 = \frac{f}{k}; \quad g_1 = \frac{g}{l};$$

oder

$$e_1 = e \cdot k \cdot l$$
$$f_1 = f \cdot h \cdot l$$
$$g_1 = g \cdot h \cdot k.$$

II. Spezieller Teil.

A. Kristallberechnung in den einzelnen Systemen.

Nach den Darlegungen im ersten Teil kann man in der Hauptsache bei der eigentlichen Kristallberechnung zwei Verfahren unterscheiden:

1. Die Möglichkeit, alle Winkel und Zonenbeziehungen eines Kristalles auf der Kugeloberfläche darzustellen, ergibt als erstes Verfahren die trigonometrische Rechnung mit Hilfe sphärischer Dreiecke. Die genauen Werte liefert eine eigentliche Rechnung; graphische Verfahren ermöglichen eine angenäherte Berechnung, nach den gegenwärtigen Hilfsmitteln mit ziemlicher Genauigkeit. Ergänzend stehen bei diesem Verfahren die analytischen Zonenbeziehungen zur Seite.

2. Hauptberechnung mit Hilfe der analytischen Beziehungen; ergänzend tritt hinzu die Rechnung mit sphärischen Dreiecken.

In vielen Fällen führt jedes der beiden Hauptverfahren in gleicher Weise ohne besondere Vor- oder Nachteile zum Ziel. Unter Umständen kann jedoch das eine Verfahren gegenüber dem anderen bedeutende Vorteile aufweisen. So ist z. B. die Berechnung der Indizes einer Fläche auf graphischem Wege, also nach einer speziellen Form der ersten Methode

ohne Zweifel einfacher als ein rein rechnerisches Verfahren, zumal hier die reine Berechnung immer auch nur angenäherte Werte mit Rücksicht auf die beobachteten Grundlagen liefert.

Wir werden deswegen im Folgenden bei der Berechnung in den einzelnen Kristallsystemen die beiden Hauptverfahren nicht gesondert behandeln, sondern je nach dem Umstande bald dem einen und bald dem anderen den Vorzug geben und in anderen Fällen beide Methoden benutzen.

Hauptwinkel.

Das erste Hauptverfahren erfordert noch einige Darlegungen:

Die Elemente eines Kristalles, nämlich das Achsenverhältnis $a:b:c$ und im triklinen System noch α, β, γ, im monoklinen der Neigungswinkel β, ferner das Verhältnis der Achsenabschnitte einer beliebigen Fläche berechnen sich direkt aus ganz bestimmten Winkeln am Kristall, auf welche darum immer die ganze Berechnung zugerichtet ist.

1. α, β, γ. α ist der Winkel zwischen den beiden Achsen b und c (Fig. 56 und 1) und zwar zwischen den Richtungen $+b$ und $+c$, also auch der Winkel zwischen den beiden zugehörigen Zonenkreisen [100 : 001] und [100:010]. Dieser Winkel erscheint im Schnittpunkt (100) der beiden Großkreise und zwar ist immer $\alpha' = 180 - \alpha$. Ähnliches gilt für β und γ. α, β und γ erhält man also immer als die Supplemente aus den drei entsprechenden Winkeln α', β', γ' des sphärischen Dreieckes (100), (001), (010).

2. Hauptwinkel für die Achsenverhältnisse $a':b'$, $a':c'$, $b':c'$ einer beliebigen Fläche (hkl).

Zu jeder Fläche (hkl) gehören drei Hauptzonen 2. Ranges, welche sich in dem Pole dieser Fläche schneiden. Die Winkel, welche diese Zonen 2. Ranges mit den Zonen 1. Ranges einschließen, führen direkt zum Achsenverhältnis. So gehört der Winkel η_3 bei (001) (Fig. 62a) zwischen Zone [100 : 001] und [001 : 110] einem ebenen Dreieck in der ab-Achsenebene an (Fig. 62b) und liefert daraus $\frac{a}{b(=1)} = \frac{\sin \eta_3}{\sin[180 - (\gamma + \eta_3)]}$. Ähnlich liefert Winkel η_1, welcher das Dreieck BOC (Fig. 62c) bestimmt $\frac{c}{b(=1)} = \frac{\sin \eta_1}{\sin[180 - (\alpha + \eta_1)]}$; ferner liefert η_2 $\frac{a}{c} = \frac{\sin[180 - (\beta + \eta_2)]}{\sin \eta_2}$.

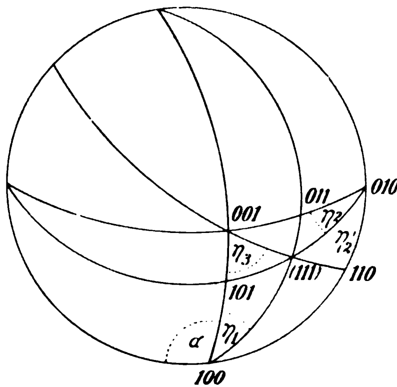


Fig. 62a.

Um also $a':b':c'$ für eine beliebige Form zu erhalten, muß man je zwei der drei Winkel η_1, η_2, η_3 kennen. Daraus ergeben sich dann von selbst die Indizes der Fläche, bezogen auf das Grundverhältnis $a:b:c$.

Für Flächen, welche nicht im vorderen Oktanten liegen, ergeben sich natürlich die entsprechenden Hauptwinkel im zugehörigen Oktanten.

In Systemen, wo die drei Winkel α, β, γ insgesamt oder teilweise 90° werden, ergibt sich sowohl eine einfachere Berechnung der Hauptwinkel und ebenso eine einfachere Berechnung des Verhältnisses der Achsenabschnitte.

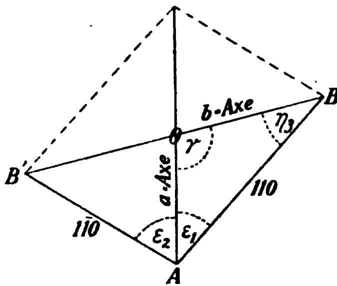


Fig. 62b.

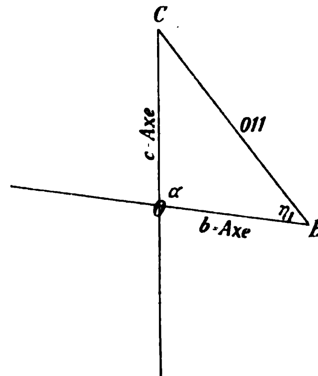


Fig. 62c.

Der Gang einer Kristallberechnung zerfällt in folgende Abschnitte:

1. Darstellung der durch die Messung und Beobachtung erhaltenen Winkel- und Zonenbeziehungen in einer stereographischen Projektion des Flächenkomplexes mit Hilfe eines graphischen Verfahrens (Wulffsches Netz). Damit kann man eine graphische Berechnung der Elemente verbinden.

Bei Messung mit dem zweikreisigen Goniometer empfiehlt sich auch die Verwendung eines gnomonischen Netzes (nach Goldschmidt), wenn man nicht vorzieht, die Messungsergebnisse zuerst in der üblichen Form der Zonenbeziehungen darzustellen.

2. Exakte Berechnung der Elemente des Kristalles aus der Mindestzahl von Fundamentalwinkeln. Zur Berechnung dienen entweder die Grundformeln oder die Methoden der sphärischen Trigonometrie; bei letzteren benutzt man zur Ergänzung eine graphische Methode der stereographischen Projektion (Wulffsches Netz).

3. Berechnung der Indizes der übrigen Formen aus den Elementen des Kristalles und der nötigen Zahl von Messungen für eine Form. Die Rechnung erfolgt mit ausreichendem Ergebnis meist graphisch mit Hilfe der stereographischen (oder gnomonischen) Projektion, seltener auch m Hilfe der Grundformeln oder der sphärischen Trigonometrie.

4. Berechnung einer Anzahl von Winkeln für die einzelnen Formen, am besten mit Hilfe der Grundformeln, in anderen Fällen trigonometrisch.

Allgemeine graphische Aufgaben.

Seit der Einführung der sogenannten Netze ist die Verwendung der stereographischen und gnomonischen Projektion als kristallographisches Hilfsmittel höchst einfach geworden. Jede Untersuchung soll daher von der Benutzung graphischer Methoden begleitet werden. Ein größeres Maß der Anwendung erhält von uns das Wulffsche stereographische Netz, ein geringeres die gnomonische Projektion bei den folgenden allgemeinen Aufgaben:

1. Stereographische Projektion der Hauptflächenpole eines Kristalles aus den beobachteten Fundamentalwinkeln. Die Behandlung dieser Aufgabe mit Hilfe des Wulffschen Netzes erfolgt bei den einzelnen Kristallsystemen.

2. Projektion der Flächenpole aus den Elementen α, β, γ; $a:b:c$[1]).

a) Stereographisch (mit Hilfe des Wulffschen Netzes). Man berechne zuerst im Dreieck (100, 010, 001) (Fig. 62a) aus den drei Winkeln α', β', γ' die Seite (100):(010). η_2 und η_3 kann man mit Hilfe des Netzes konstruieren. Man mache (Fig. 63) — am besten auf einem besonderen Blatt — die b-Achse = 10 cm, die c-Achse = $10 \times c$ cm und die a-Achse = $10 \times a$ cm, wobei zugleich die Neigungswinkel α und β benutzt werden; η_1 ist dann gleich dem halben Bogenstück $b_1 b_1'$, η_2' gleich dem halben Bogenstück $b_2 b_2'$.

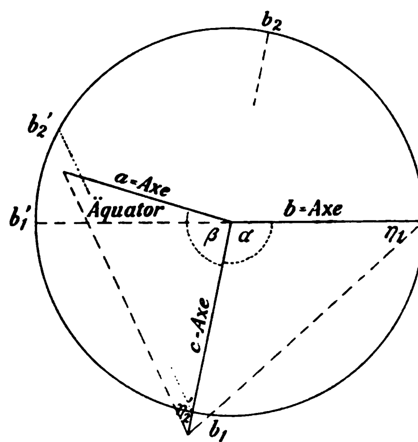


Fig. 63.

Nun wird die eigentliche Kristallprojektion entworfen. Auf dem Grundkreis trägt man (010) und (100) ein (Fig. 62a). Durch (010) ziehe man über dem Netz zwei Großkreise unter den Neigungswinkeln β' und η_2' gegen den Grundkreis, ebenso durch (100) zwei solche Kreise mit den entsprechenden Neigungen α' und η_1. Als Schnittpunkte der erhaltenen Großkreise ergeben sich die Pole (001), (101), (011), (111). Weitere einfache Pole erhält man leicht, z. B. (110), ($\bar{1}$01), ($\bar{1}$11), (0$\bar{1}$1) usw. (Fig. 65), nachdem jetzt eine beliebige Zahl von Großkreisen bestimmt ist.

Zur Eintragung einer beliebigen Fläche (hkl) aus den Indizes ermittelt man nach dem Verfahren in Fig. 63 aus dem Verhältnis der Achsenabschnitte $a':b':c'$ die der Fläche (hkl) zugehörigen Winkel (η_1) und (η_2); dabei setzt man b' tunlichst gleich 10 cm.

1) Die Konstruktionen seien für den allgemeinen Fall des triklinen Systems erläutert.

Bedeutende Kürzungen im Verfahren in den höheren Systemen ergeben sich von selbst auf einfachem Wege.

b) Gnomonisch. Man berechne (Fig. 62a) im Dreieck (100, 010, 001) aus α', β', γ' die Abstände (100):(010) $= C$ und (010):(001); ferner (Fig. 46a und b) im Dreieck (010, 001, x) die Stücke $90 - d$ und δ.

η_1 und η_2 konstruiert man über dem Wulffschen Netz wie bei a.

Zur nun folgenden Ausführung der gnomonischen Projektion benutzt man gewöhnlich einen Grundkreisradius von 5 cm und einen guten gewöhnlichen Transporteur, wie er z. B. mit dem stereographischen Transporteur von Penfield (Fig. 30) verbunden ist. Man mache auf dem Grundkreis (Fig. 64) Bogen $ef = \delta$ und Bogen $eg = C$ und $ff_1 = 90$; man ziehe ferner Of; der Winkelpunkt dazu ist f_1. Bei f_1 trage man mit dem Transporteur den Winkel d an. Dies führt zu (001) und man ziehe nun die beiden Hauptzonen [001 : 010] (parallel Oe) und [001 : 100] (parallel Og) deutlich aus. Schwach werden wieder die Senkrechten zu beiden Richtungen Oh und Ok angedeutet mit den zugehörigen Winkelpunkten h_1 und k_1.

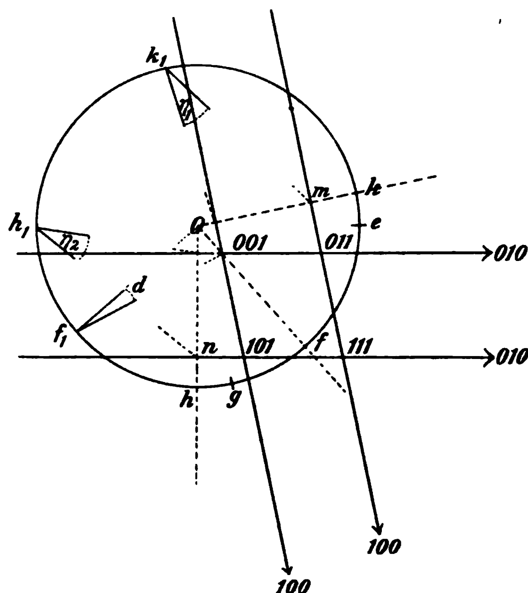


Fig. 64.

Bei k_1 trage man η_1, bei h_1 den Winkel η_2 an. Dies liefert zwei Punkte m und n. Die deutlich auszuziehende Parallele durch m zur Zone [001 : 100] und jene durch n zur Zone [001 : 010] stellen weitere Zonen dar, nämlich [011 : 100] und [101 : 010].

Jede weitere Fläche, z. B. (231) (Fig. 35) läßt sich nun leicht aus ihren Indizes eintragen; man mache in unserem Beispiel die Strecke [001, 031] gleich der dreifachen Strecke [001, 011] und die Strecke [001, 201] gleich der zweifachen Strecke [001, 101] und ziehe die Parallelen, wie Fig. 35 zeigt.

Auch die Aufgabe b) erfährt in den höheren Systemen eine bedeutende Vereinfachung. So fällt z. B.

im monoklinen System die Ermittelung von δ weg; $d = 90 - \beta'$; Ok wird senkrecht zu Oh;

im rhombischen System fallen die Hilfsgeraden Ok und Oh bereits mit den Hauptzonen zusammen usw.

3. Aus einer stereographischen Projektion (mit dem Wulffschen Netz entworfen) sind die Elemente α, β, γ; $a:b:c$ des Kristalles oder die Indizes einer beliebigen Fläche zu entnehmen.

Man hat mit Hilfe des stereographischen Netzes die Zonenwinkel α, β, γ, η_1 und η_2 (Fig. 62a) zu messen. Die Umkehrung der in Fig. 63 behandelten Aufgabe liefert $a:b:c$. Für eine beliebige Fläche (hkl) erhält man durch eine analoge Konstruktion mit den zugehörigen Winkeln (η_1) und (η_2) das Verhältnis $a_1:b_1:c_1$ und daraus die Indizes.

Anmerkung. Aus einer gnomonischen Projektion erhält man die Hauptwinkel nach Fig. 64.

Triklines System.

Stereographische Projektion. Als Vorbild zur Orientierung in der üblichen Aufstellung der Kristalle dient Fig. 65. In den meisten Fällen wird man mit Rücksicht auf die übliche Kristallaufstellung von einem Winkel in der vertikalen Prismenzone ausgehen können. Überhaupt richtet man die Entwickelung der Projektion, soweit Freiheit hierfür besteht, tunlichst so ein, daß eine gesonderte Dreiecksauflösung möglichst vermieden werde. Die Vielseitigkeit der möglichen Aufgaben sei an einigen Beispielen erläutert:

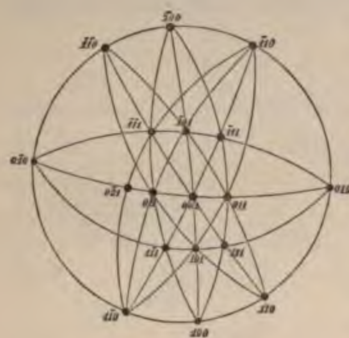


Fig. 65.

1. In der vertikalen Prismenzone seien gemessen (010):(110) und (110):(1$\bar{1}$0). Man zeichne also den Grundkreis und darauf im richtigen Bogenabstand die drei Pole nebst ihren Gegenpolen ein (Fig. 65). Ferner sei gegeben (110):(001) und (010):(001); man lege also zunächst (110) auf den einen Hauptpol des Netzes und fahre auf dem Pauspapier über dem Netz den entsprechenden Kleinkreis nach und verfahre dann analog mit (010) und dem zugehörigen Bogenabstand (010):(001). Der Schnittpunkt beider Kleinkreise innerhalb des Grundkreises ist dann der gesuchte Pol (001). Dann zeichne man unter entsprechender Drehung bei festliegendem Mittelpunkt die drei Großkreise (110):(001), (1$\bar{1}$0):(001) und (010):(001). Auf der Zone [010:001] sei noch der Abstand (001):(011) gegeben, welchen man gleichzeitig als den Abstand der Kleinkreise ablesen kann. Nun kann man weitere Großkreise zeichnen, z. B. (110):(011), (1$\bar{1}$0):(011) usw.

Weitere Formen kann man auf eine der drei folgenden Weisen eintragen: a) Man erhält den Pol als Schnittpunkt zweier bekannter Zonen; z. B. die beiden Zonen [010:001] und [1$\bar{1}$0:$\bar{1}\bar{1}$1] liefern in ihrem Schnittpunkt direkt (0$\bar{2}$1). b) Man kennt den Abstand des fraglichen Poles von einem Pol einer bekannten Zone; z. B. sei in der Zone [010:001] der Ab-

stand von (001) bekannt, welchen man direkt abtrage. c) Man kennt bloß den Abstand des fraglichen Poles x von zwei bekannten Polen, z. B. von (101) und $(\bar{1}01)$. In diesem Falle macht man am besten eine Hilfskonstruktion, indem man ausgehend vom Grundkreis des Netzes das Dreieck $(101, \bar{1}01, x)$ aus seinen drei Seiten ermittelt. Man mißt dann etwa den Winkel bei $(\bar{1}01)$ und zieht dann in der eigentlichen Projektion durch $(\bar{1}01)$ unter dem erhaltenen Winkel den Großkreis, auf welchem man durch Abtragen des Abstandes $(\bar{1}01):x$ den fraglichen Pol erhält.

2. Gegeben seien $(1\bar{1}0):(110)$, $(110):(001)$, $(1\bar{1}0):(001)$, $(011):(001)$, $(0\bar{1}1):(001)$

Man zeichnet zuerst auf dem Grundkreis in ihrem Abstande die Pole (110) und $(1\bar{1}0)$ und erhält dann (001) als Schnittpunkt zweier Kleinkreise, nämlich eines solchen um (110) mit dem Winkelradius (110):(001) und eines solchen um $(1\bar{1}0)$ mit dem Winkelradius $(1\bar{1}0):(001)$; man ziehe, soweit ungefähr nötig, die beiden zugehörigen Kleinkreise über dem Netz. Dann zeichne man mit Hilfe des Netzes die beiden Großkreise [001 : 110] und $[001 : 1\bar{1}0]$.

Aus den beiden Winkeln (001):(011) und $(001):(0\bar{1}1)$ berechne man nun nach Seite 57 den weiteren Winkel (001):(010) dieser Zone; diesen Winkel kann man auch nach Seite 63 konstruieren. Nun ermittelt man mit Hilfe des gefundenen Abstandes den Pol (010) auf dem Grundkreis. Man dreht die Zeichnung so lange über dem Netz, bis auf einem Meridian der Abstand (001) vom vorderen Hauptpol des Netzes gleich dem erhaltenen Winkelabstand erscheint, also bis (001) auf dem entsprechenden Kleinkreis liegt. Der Punkt auf dem Grundkreis über diesem Hauptpol ist (010) und nun kann man gleichzeitig den Großkreis [010 : 001] ziehen und auf ihm noch die gegebenen Winkel abtragen.

3. Kann man von keinem Winkel in der vertikalen Prismenzone ausgehen, dann beginnt man eben zunächst auf dem Grundkreis mit einer anderen Zone durch (010) (Fig. 66). Z. B. sei gegeben

$(111):(1\bar{1}1)$
$(111):(\bar{1}11)$
$(1\bar{1}1):(\bar{1}11)$
$(1\bar{1}1):(\bar{1}\bar{1}1)$
$(\bar{1}11):(\bar{1}\bar{1}1)$

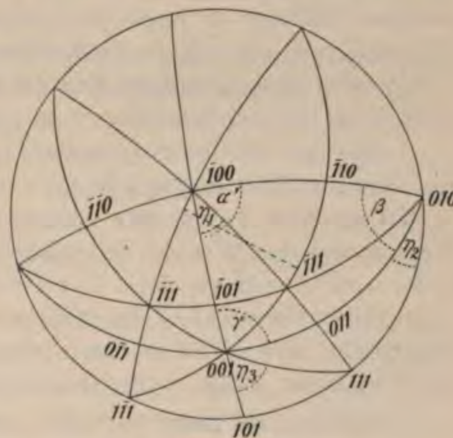


Fig. 66.

Man konstruiert zuerst das Dreieck $(1\bar{1}1, 111, \bar{1}11)$ aus seinen drei gegebenen Seiten. Ebenso trägt man in einer Nebenkonstruktion auf dem

Grundkreis den Abstand $(1\bar{1}1):(\bar{1}11)$ ab und konstruiert darüber das Dreieck $(1\bar{1}1, \bar{1}\bar{1}1, \bar{1}11)$ aus den gegebenen Seiten und mißt den Winkel dieses Dreieckes bei $(1\bar{1}1)$. In der eigentlichen stereographischen Projektion zieht man dann unter diesem Winkel gegen den schon eingetragenen Meridian $[1\bar{1}1:\bar{1}11]$ den weiteren Großkreis $[1\bar{1}1:\bar{1}\bar{1}1]$ (Messung der Neigung auf dem Äquator) und erhält gleichzeitig den Abstand $(1\bar{1}1):(\bar{1}\bar{1}1)$. Dann ziehe man weitere Großkreise durch je zwei nun in ihrer Lage gegebene Pole, nämlich den Großkreis $[\bar{1}\bar{1}1:\bar{1}11]$, was Pol (010) liefert, ferner $[111:\bar{1}\bar{1}1]$, was (001) als Schnittpunkt auf $[1\bar{1}1:\bar{1}11]$ ergibt, schließlich $[111:\bar{1}11]$, was (100) auf $[1\bar{1}1:\bar{1}\bar{1}1]$ als Schnittpunkt ergibt. Damit sind alle Hauptwinkel zur Ermittelung der Elemente des Kristalles eingetragen und auch alle möglichen weiteren Zonen bestimmt, welche man nach Bedarf einzeichnet.

Berechnung der Elemente.

Die Elemente eines triklinen Kristalles

$$a:b:c = x:1:y$$
$$\alpha;\quad \beta;\quad \gamma$$

(Beispiel: $CuSO_4 \cdot 5H_2O$ a:b:c = 0,5721 : 1 : 0,5554 Barker,
$\alpha = 82^\circ 5'$, $\beta = 107^\circ 8'$, $\gamma = 102^\circ 41'$.)

enthalten fünf zu berechnende Größen. Aus der Grundgleichung für den Cosinus des Winkels zweier Flächen ergibt sich, daß zur Berechnung fünf voneinander unabhängige Winkelmessungen am Kristall nötig und auch ausreichend sind; doch dürfen insbesondere nicht mehr wie zwei Winkel einer Zone angehören, da nach Seite 57 zwei Winkel alle übrigen Winkel in dieser Zone bestimmen. Bei der Berechnung der Elemente aus der Mindestzahl von Fundamentalwinkeln wendet man die sphärisch-trigonometrische Methode in weiterem Umfange an als bei den übrigen Systemen, weil die Grundformeln (Cosinusformel) hier oft zu umständlichen Gleichungssystemen führen.

Von den vielen Möglichkeiten der Kombination der Fundamentalwinkel seien einige Fälle behandelt.

a) Der sphärisch-trigonometrischen Berechnung sind hauptsächlich folgende Fälle zugänglich:

1. Gegeben seien zwei Zonen (durch zwei aufeinander folgende Winkel) und der Winkel zwischen einem beliebigen Pol der einen Zone und einem solchen der zweiten Zone.

In diesen Fällen führt die sphärisch-trigonometrische Rechnung auf die Hauptwinkel und damit zu den Elementen des Kristalles. Zur Erläuterung des Verfahrens dienen folgende Beispiele:

α) Gegeben sei Zone [010:101], etwa durch die beiden Winkel (010):(101) und (010):(111);

Zone [001:100], etwa durch die beiden Winkel (100):(101) und (101):(001);

ferner (100):(010).

Die stereographische Projektion (mittelst Netz) erhält man auf einfache Weise. Man trage auf den Grundkreis die beiden Pole (010) und (100) im gegebenen Abstand ein und ermittele (101) als Schnittpunkt zweier Kleinkreise mit dem Radius (100):(101), bzw. (010):(101) und zeichne nun die Großkreise [101 : 010] und [100 : 101]. Auf ersterem zeichne man (111) ein, aus dem Abstand (010):(111), auf letzterem (001) aus dem Abstand (101):(001). Nun ziehe man die Großkreise [100 : 111 : 011], [001 : 111 : 110] und [001 : 010]. Damit sind die Hauptwinkel zur Ermittelung der Elemente nach Seite 68 bestimmt.

Bei der eigentlichen Berechnung erhält man im Dreieck (100), (010), (101) zunächst den Winkel bei (100), nämlich $\alpha' = 180 - \alpha$ und jenen bei (010), η_2'. Dreieck (100), (010), (001) ist nun ebenfalls bestimmt und liefert den Winkel bei (001), $\gamma' = 180 - \gamma$ und bei (010) $\beta' = 180 - \beta$. Dreieck (010), (100), (111) liefert ebenso einen weiteren Winkel bei 100, nämlich η_1' und damit sind zwei weitere Hauptwinkel bestimmt, nämlich $\eta_1 = \alpha' - \eta_1'$ und $\eta_2 = \beta' - \eta_2'$.

β) Gegeben Zone [100 : 001], wie im Beispiel a);
Zone [110 : 0$\bar{1}$1], etwa durch (110):(101) und (101):(0$\bar{1}$1);
ferner (001):(0$\bar{1}$1).

Um die stereographische Projektion (mittelst Netz) zu erhalten, trägt man zunächst beliebig auf dem Grundkreis (001):(0$\bar{1}$1) ab und konstruiert darüber das Dreieck (0$\bar{1}$1), (001), (101) und ziehe den Großkreis [0$\bar{1}$1 : 101] und erhält darauf im gegebenen Abstand (110); ebenso ziehe man Großkreis [001 : 101] und darauf im gegebenen Abstand (100). Man ziehe den Großkreis [100 : 110] und löse Dreieck (110), (100), (101) auf. Damit hat man geeignete Bestimmungsstücke, um jetzt die normale stereographische Projektion aufzuführen:

Auf dem Grundkreis trägt man (100):(110) im ermittelten Abstand auf, ferner einen Großkreis durch jeden der beiden Punkte unter den ebenfalls ermittelten Neigungswinkeln. Dies ergibt die Zonen [100 : 001] und [110 : 0$\bar{1}$1], auf welchen man die aus der Messung bekannten Pole (0$\bar{1}$1) und (001) abträgt; der Großkreis durch die letzteren liefert auf dem Grundkreis (010). α', β', γ' kann man nun entgültig messen. Die Zonen [010 : 101] und [110 : 001] kann man nun ebenfalls ziehen und erhält damit die Hauptwinkel η_2 und η_3.

Bei der eigentlichen Berechnung liefert Dreieck (101), (001), (0$\bar{1}$1) bei (001) direkt γ, ferner den Winkel bei (101) und bei (0$\bar{1}$1). Die jetzt mögliche Berechnung des Dreieckes (100), (101), (110) liefert α', jene des Dreieckes (0$\bar{1}$1), (001), (110) η_3. Ferner liefert Dreieck (001), (100), (0$\bar{1}$1) bei (100) einen Winkel zur Berechnung von $c : \bar{b}$.

2. Gegeben die Winkel zwischen drei Polen und die Zone durch zwei dieser Pole und ein fünfter Winkel von einem der drei Pole aus:

Beispiel. Gegeben (010):(110), (010):(001) und (110):(001);
ferner (001):(0$\bar{1}$1), die Zone [010:001] mitbestimmend;
dann (001):(101).

Die stereographische Projektion (mit Hilfe des Netzes) erhält man auf folgende Weise: Man trägt auf dem Grundkreis (010) und (110) ab und ermittelt von diesen beiden Punkten aus (001); dann lege man die Großkreise durch (001) und (010), bzw. (001) und (110). Auf ersterer Zone trägt man noch (0$\bar{1}$1) ab und zieht dann Großkreis [0$\bar{1}$1:110]. In Dreieck (001), (101), (0$\bar{1}$1) kennt man nun den Winkel bei (0$\bar{1}$1), ferner sind gegeben die Seiten (0$\bar{1}$1):(001) und (001):(101). Man löst also dieses Dreieck für sich auf, indem man (0$\bar{1}$1) und (001) auf dem Grundkreis abträgt, um (001) den Kleinkreis mit dem Radius (001):(101) zieht und durch (0$\bar{1}$1) einen Großkreis unter dem ermittelten Dreieckswinkel legt; im Schnittpunkt der beiden letzteren Kreise erhält man dann den dritten Dreieckspunkt (101). Nun mißt man auf dem Äquator den Winkel zwischen Grundkreis und dem Großkreis durch (001) und (101). Dies ist für unser Dreieck der Winkel bei (001) $= \gamma$. Unter diesem Winkel gegen Großkreis [001:0$\bar{1}$1] zieht man in der eigentlichen stereographischen Projektion durch (001) den Großkreis. Dieser liefert (101) auf dem schon eingetragenen Großkreis (110):(0$\bar{1}$1) und (100) auf dem Grundkreis. Zieht man noch den Großkreis [010:101], dann kann man alle Hauptwinkel direkt abmessen.

Bei der eigentlichen Berechnung liefert Dreieck (010), (110), (0$\bar{1}$1) aus seinen drei gegebenen Seiten direkt bei (010) den Winkel β' und den Winkel bei (0$\bar{1}$1). Dreieck (0$\bar{1}$1), (001), (101) liefert jetzt bei (001) den Winkel γ, ferner Dreieck (010), (001), (101) einen Hauptwinkel bei (010) — für $a:c$. Dreieck (001), (010), (100) liefert nun aus der gegebenen Seite und den beiden berechneten Winkeln den weiteren Winkel α' und (100):(001) und (100):(010). Dreieck (100), (001), (0$\bar{1}$1) ergibt in dem Winkel bei (100) einen Hauptwinkel für $c:b$.

3. Gegeben die Winkel zwischen drei Polen und eine Zone, welche einen der drei Pole enthält.

Beispiel. Gegeben (001):(100), (001):(110), und (100):(110);
ferner Zone [010:001], etwa durch die zwei Winkel (001):(011) und (001):(0$\bar{1}$1).

Die Darstellung in stereographischer Projektion ist bereits Seite 73 behandelt.

Bei der eigentlichen Berechnung liefert Dreieck (100), (001), (110) bei (100) zunächst α' und im Winkel bei (001) den Hauptwinkel η_3 für die Berechnung von $a:b$.

Nach Seite 57 kann man (001):(010) berechnen und nun liefert Dreieck (100), (010), (001) in seinen beiden weiteren Winkeln β' und γ'. Dreieck

(100), (001), (011) liefert im Winkel η_1 bei (100) einen Hauptwinkel für die endgültige Berechnung von $c:b$ aus einem ebenen Dreieck.

4. Gegeben fünf Winkel zwischen vier Polen, von welchen nicht drei in einer Zone liegen.

Beispiel. Gegeben $(111):(1\bar{1}1)$, $(111):(\bar{1}11)$, $(1\bar{1}1):(\bar{1}11)$, $(\bar{1}\bar{1}1):(\bar{1}11)$, $(1\bar{1}1):(\bar{1}\bar{1}1)$.

Die graphische Ableitung der stereographischen Projektion zeigt Fig. 66 auf Seite 73.

Bei der eigentlichen Berechnung liefert Dreieck $(\bar{1}\bar{1}1)$, $(\bar{1}11)$, (111) Winkel bei $(\bar{1}11)$ und $(\bar{1}\bar{1}1)$, ebenso Dreieck $(\bar{1}11)$, $(\bar{1}\bar{1}1)$, $(1\bar{1}1)$ solche bei $(\bar{1}\bar{1}1)$, $(1\bar{1}1)$, und $(\bar{1}11)$. Nun kann man in Dreieck $(\bar{1}\bar{1}1)$, $(\bar{1}00)$, $(\bar{1}11)$ die beiden Seiten $(\bar{1}\bar{1}1):(\bar{1}00)$ und $(\bar{1}11):(\bar{1}00)$ berechnen, ebenso in Dreieck $(\bar{1}\bar{1}1)$, (001), $(1\bar{1}1)$ die beiden Seiten $(1\bar{1}1):(001)$ und $(\bar{1}\bar{1}1):(001)$. Dreieck (001), $(\bar{1}11)$, $(\bar{1}00)$ liefert jetzt η_1, und den Winkel bei (001) (Hauptwinkel für $c:b$ und $a:b$), ferner die Seite $(001):(\bar{1}00)$. Dreieck (001), $(\bar{1}00)$, $(\bar{1}10)$ ergibt schließlich α'. Für Dreieck $(1\bar{1}1)$, $(0\bar{1}1)$, (001) kann man nach dem rationalen Doppelverhältnis $(1\bar{1}1):(0\bar{1}1)$ berechnen und dann liefert unser Dreieck den Winkel bei (001). Damit ist auch γ bestimmt. In Dreieck (001), (100), (010) (Fig. 65) kennt man nun die Seite (001):(100) und die Winkel α' und γ'; man erhält also auch bei (010) den letzten Winkel β'.

b) Berechnung mit Hilfe der Grundgleichungen.

Grundformeln: 1. Formel für den Cosinus des Winkels zweier Flächenpole (Formel 5, Seite 51).

2. Formel für das Doppelverhältnis (Formeln 9—11).

Die eben behandelten Fälle können natürlich auch der vorwiegend analytischen Berechnungsmethode unterworfen werden. Dieselbe gestattet aber auch eine Lösung in den Fällen, wo die Fundamentalwinkel so gegeben sind, daß eine sphärisch-trigonometrische Berechnung unmöglich ist.

Aus fünf Winkelmessungen V_1, V_2 ... erhalten wir fünf Gleichungen $\cos V_1$, $\cos V_2$ ... zur Berechnung der Elemente. Doch liefern in allgemeineren Fällen diese Gleichungen nur auf umständliche Weise ein Resultat. Die Berechnung vereinfacht sich bereits, wenn mindestens eine beliebige Zone gegeben ist. Doch ist auch hier die Rechnung noch umständlich, so daß wir nur speziellere Fälle behandeln, nämlich solche, wo Zonen 1. und 2. Ranges gegeben sind. Manche allgemeinere Fälle können zuerst entsprechend durch einige trigonometrische Berechnungen umgewandelt werden. Im übrigen sei für diese auf die ausführliche Abhandlung von Dufet[1]) verwiesen.

Für die Hauptzonen 1. und 2. Ranges ergibt die Cosinusformel eine Anzahl einfacher spezieller Gleichungen, welche leicht aus der Hauptgleichung abzuleiten sind. Spezialgleichungen:

1) H. Dufet, Bull. de la Soc. fr. min. 1904, **27**, 190.

I.

$$\frac{N}{\lambda} = \cos(100):(010) \qquad (1')$$

$$\frac{M}{\nu\lambda} = \cos(100):(001) \qquad (2')$$

$$\frac{L}{\nu} = \cos(001):(010). \qquad (3')$$

II.

Für eine gegebene Hauptzone 1. Ranges gilt:

$$\lambda = \frac{q}{p} \cdot \frac{\sin(010):(pqo)}{\sin(100):(pqo)} \qquad (4')$$

$$\frac{\lambda}{\nu} = \frac{r}{p} \cdot \frac{\sin(001):(por)}{\sin(100):(por)} \qquad (5')$$

$$\nu = \frac{q}{r} \cdot \frac{\sin(010):(oqr)}{\sin(001):(oqr)}. \qquad (6')$$

III.

Für eine gegebene Hauptzone 2. Ranges gilt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{q^2 + r^2\nu^2 + 2qrL}{p^2\lambda^2} &= \left[\frac{\sin(100):(pqr)}{\sin(oqr):(pqr)}\right]^2 \\ \frac{rM + qN}{p\lambda^2} &= \cos(100):(oqr) \cdot \frac{\sin(100):(pqr)}{\sin(oqr):(pqr)} \end{aligned}\right\} \qquad (7')$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{p^2\lambda^2 + r^2\nu^2 + 2prM}{q^2} &= \left[\frac{\sin(010):(pqr)}{\sin(por):(pqr)}\right]^2 \\ \frac{pN + rL}{q} &= \cos(010):(por) \cdot \frac{\sin(010):(pqr)}{\sin(por):(pqr)} \end{aligned}\right\} \qquad (8')$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{p^2\lambda^2 + q^2 + 2pqN}{r^2\nu^2} &= \left[\frac{\sin(001):(pqr)}{\sin(pqo):(pqr)}\right]^2 \\ \frac{qL + pM}{r\nu^2} &= \cos(001):(pqo) \cdot \frac{\sin(001):(pqr)}{\sin(pqo):(pqr)} \end{aligned}\right\}. \qquad (9')$$

Sind die Fundamentalwinkel derart gegeben, daß Gleichungen dieser Art sich bestimmen, dann ist die analytische Berechnung einfach. Dies ist der Fall, wenn zwei Zonen 1. oder 2. Ranges neben einem beliebigen fünften Winkel gegeben sind. Man richtet also dementsprechend die Auswahl der Fundamentalwinkel ein. Es seien im folgenden einige Einzelfälle zur Erläuterung des Verfahrens behandelt.

1. G e g e b e n z w e i H a u p t z o n e n 1. R a n g e s u n d e i n b e l i e b i g e r W i n k e l.

Beispiel. Gegeben Zone [001 : 010], durch die Winkel (001) : (011) und (010) : (001);
Zone [100 : 001], durch die Winkel (001) : (101) und (100) : (101);
und (001) : (110).

Von den Spezialgleichungen kommen folgende zur Anwendung:

Gleichung (6') ergibt ν, Gleichung (3') $\frac{L}{\nu}$, also auch L. Gleichung (5') liefert $\frac{\lambda}{\nu}$, also λ und Gleichung (2') $\frac{M}{\nu\lambda}$, also M und schließlich erhält man aus dem fünften Winkel noch aus Hauptformel (5') die Gleichung $\cos(001):(110) = \frac{L+M}{\nu\sqrt{\lambda^2+1+2N}}$ und daraus schließlich N.

2. Gegeben eine Hauptzone 1. Ranges und eine solche 2. Ranges durch den gleichen Hauptpol nebst einem fünften Winkel.

Beispiel. Zone [001 : 010], durch (001) : (010) und (001) : (0$\bar{1}$1);
Zone [001 : 1$\bar{1}$0], durch (001) : (1$\bar{1}$0) und (001) : (1$\bar{1}$1);
ferner (0$\bar{1}$0) : (1$\bar{1}$1).

ν und L erhält man wie beim ersten Beispiel.

Die Gleichungen (9') ergeben dann $\lambda^2 - 2N$ und M. Für den fünften Winkel liefert die Hauptgleichung

$$\cos(0\bar{1}0):(1\bar{1}1) = \frac{1-L-N}{\sqrt{\lambda^2+1+\nu^2-2L+2M-2N}},$$

also N und schließlich erhält man λ^2, nachdem auch $\lambda^2 - 2N$ bekannt ist.

3. Gegeben zwei Zonen 2. Ranges durch den gleichen Hauptpol und ein fünfter Winkel.

Beispiel. Zone [010 : 101], durch (010) : (101) und (101) : (1$\bar{1}$1);
Zone [010 : 10$\bar{1}$], durch (010) : (11$\bar{1}$) und (11$\bar{1}$) : (10$\bar{1}$);
ferner (101) : (10$\bar{1}$).

Gleichungen (8') ergeben:

$\lambda^2+\nu^2+2M$ und $N+L$ — Zone [010 : 101]
$\lambda^2+\nu^2-2M$ und $N-L$ — Zone [010 : 10$\bar{1}$].

Dies liefert also sehr einfach M, N, L und $\lambda^2+\nu^2$.

Für den fünften Winkel ergibt die Hauptgleichung

$$\cos(101):(10\bar{1}) = \frac{\lambda^2-\nu^2}{\sqrt{\lambda^2+\nu^2+2M}\cdot\sqrt{\lambda^2+\nu^2-2M}},$$

also nach einfacher Substitution der erhaltenen Werte für die Summe unter den Wurzeln $\lambda^2-\nu^2$. Aus $\lambda^2+\nu^2$ und $\lambda^2-\nu^2$ erhält man dann ν^2 und λ^2.

4. Gegeben zwei Hauptzonen 2. Ranges, nicht durch den gleichen Hauptpol gehend und ein beliebiger fünfter Winkel.

Beispiel. Zone [010 : 101], durch (0$\bar{1}$0) : (1$\bar{1}$1) und (1$\bar{1}$1) : (101);
Zone [001 : 110], durch (001) : (11$\bar{1}$) und (001) : (110);
ferner (110) : (010).

Zone [010 : 101] liefert mit Gleichungen (8′)

$$\lambda^2 + \nu^2 + 2M = \left[\frac{\sin(0\bar{1}0):(1\bar{1}1)}{\sin(101):(1\bar{1}1)}\right]^2$$

und

$$L + N = \cos(010):(101) \cdot \frac{\sin(0\bar{1}0):(1\bar{1}1)}{\sin(101):(1\bar{1}1)}.$$

Zone [001 : 110] ergibt mit Gleichungen (9′)

$$\frac{\lambda^2 + 1 + 2N}{\nu^2} = \left[\frac{\sin(00\bar{1}):(11\bar{1})}{\sin(110):(11\bar{1})}\right]^2$$

und

$$\frac{L + M}{\nu^2} = \cos(001):(110) \cdot \frac{\sin(00\bar{1}):(11\bar{1})}{\sin(110):(11\bar{1})}.$$

Ferner ergibt:

$$\cos(010):(110) = \frac{1 + N}{\sqrt{\lambda^2 + 1 + 2N}}.$$

Man bilde aus der vierten Beziehung $\frac{2M}{\nu^2}$, substituiere statt L aus der zweiten N und erhält dann in der ersten Gleichung eine neue Beziehung für $\lambda^2 + 1 + 2N$ und ν^2; usw.

Die Hilfsgrößen λ^2, ν^2, L, M und N liefern dann in unseren Beispielen nach Seite 51 zunächst die Winkel A, B und C, bzw. (010):(001), (100):(001), (100):(010), was die Berechnung von α', β', γ' gestattet. Die Werte a und b des Achsenverhältnisses werden dann schließlich auch noch nach Seite 50 erhalten.

Berechnung der Indizes der Formen.

Diese kann auf Grund folgender Bestimmungsstücke erfolgen:

1. Aus der Lage der Fläche in zwei bekannten Zonen, mit Hilfe der Zonenrechnung (Seite 54).

2. Aus der Lage der Fläche in einer bekannten Zone und dem Abstand von einem Pol dieser Zone. Die Ermittelung erfolgt am besten graphisch mit Hilfe des Wulffschen Netzes und dessen Anwendung auf das rationale Doppelverhältnis (Seite 62). Man erhält zunächst A, daraus mit Hilfe der Gleichungen (11) (Seite 58) A_1 und schließlich die Indizes (hkl), A kann natürlich auch nach Gleichung 9b (Seite 57) berechnet werden.

Außer den Beispielen auf Seite 58 diene folgender Fall zur Erläuterung des graphischen Verfahrens: das unbekannte Symbol $\{\bar{1}36\}$ einer Fläche p von Cerodithionat-Hydrat[1]) ist zu ermitteln, wenn gegeben sind (100):(010), α, β, (010):(011) und $(1\bar{3}0)$:(100) und die Lage der Fläche p in der Zone $[1\bar{3}0 : 001]$ durch den Winkel (001):p. Man ziehe aus den Angaben mit Hilfe des Wulffschen Netzes die Hauptzonen, ferner die Zone $[1\bar{3}0 : 001]$. Auf letzterer trage man $[\bar{1}36]$ auf Grund des gegebenen Winkels auf; ihr Schnittpunkt mit [100 : 011] ist $(\bar{1}33)$. Mit Hilfe des Netzes mißt man noch $(1\bar{3}0)$:(001) und (001):$(\bar{1}33)$. Die nun folgende Konstruktion des Doppelverhältnisses liefert sofort das Symbol $(\bar{1}36)$.

3. Aus zwei Winkeln zu zwei bekannten Polen. Auch hier benutzt man zweckmäßig das Wulffsche Netz. Man trägt auf Grund der Angaben

1) P. Groth, Chem. Krystallographie. Leipzig 1908, **2**, 713.

die Fläche *p* in die stereographische Projektion ein und verbindet *p* mit zwei Hauptpolen, etwa (100) und (010). Die beiden so erhaltenen Zonen schneiden zwei Hauptzonen in je einem Pol, dessen Symbol man auf Grund des rationalen Doppelverhältnisses aus der Lage in einer bekannten Zone ermittelt. Damit kennt man für *p* zwei Zonen; das Symbol von *p* liefert dann die Zonenrechnung.

Beispiel: Gesucht das unbekannte Symbol $(\bar{1}36)$ einer Fläche *p* von Cerodithionat-Hydrat, wenn außer den Kristallelementen *p* : (010) und *p* : (100) gegeben sind. In die stereographische Projektion der wichtigsten Zonen (Fig. 67a) trage man *p* auf Grund der Angaben ein. Alsdann ziehe man [*p* : 100]. Auf [001 : 010] erhält man einen Pol, dessen Abstand von (001) man mit Hilfe des Netzes mißt. Die Konstruktion in Fig. 67b liefert direkt das Symbol (012). Ebenso zieht man [*p* : 010]. Für den dadurch auf [100 : 001] bestimmten Pol liefert die Konstruktion in Fig. 67c das Symbol $(\bar{1}06)$. Für *p* berechnet sich also $(\bar{1}36)$.

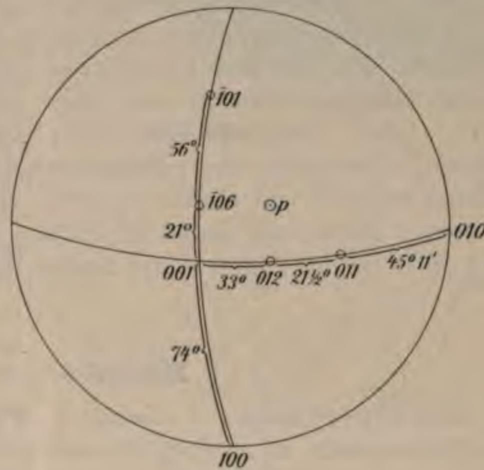


Fig. 67a.

Ein anderes Verfahren zur Ermittelung eines Flächensymboles ist auf Seite 72 ausführlich beschrieben.

In manchen Fällen, besonders bei komplizierten Symbolen, ist die Berechnung erforderlich. In unserem Beispiele (Fig. 67a) würden sich im Dreieck (001, 010, *p*) die Winkel bei (001) und (010)

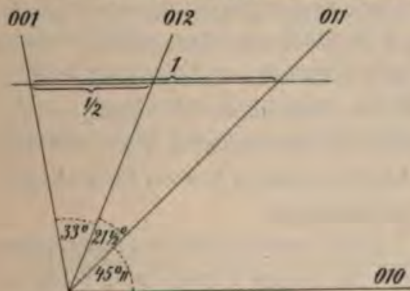


Fig. 67b.



Fig. 67c.

berechnen lassen. Aus ersterem erhält man in einem ebenen, schiefwinkeligen Dreieck $a' : b'$, aus letzterem $a' : c'$.

Berechnung von Winkeln zwischen Flächen mit bekannten Indizes.

Angenäherte Werte erhält man auf graphischem Wege aus der stereographischen Projektion, indem man den Winkel zwischen zwei eingetragenen Polen nach Seite 27 mißt.

Bei der genauen Rechnung erhält man einen beliebigen Winkel in einer bekannten Zone nach Seite 57, Formel 10.

Zur Berechnung eines beliebigen Winkels zwischen zwei Polen benutzt man die Cosinusformel. Dies ist besonders dann der Fall, wenn man schon von vorn herein vorwiegend analytisch gerechnet hat, also die Hilfsparameter ν^2, λ^2, L, M, N bereits kennt oder auch dann, wenn man eine große Zahl von Winkeln zu berechnen hat. Die Hilfsparameter erhält man nötigenfalles aus den Elementen des Kristalles nach Seite 50.

Bei der sphärisch-trigonometrischen Berechnung liefert die sukzessive Dreiecksentwickelung ohne besondere Schwierigkeit eine Anzahl von Winkeln. Für die Berechnung eines beliebigen Winkels berechnet man zuerst einfachere Winkel und einige Hauptwinkel. Z. B. gesucht sei (211) : (121). Man berechnet (211) : (001) und (121) : (001) und mittelst ebener Dreiecke aus den entsprechenden Elementen für (211) den Hauptwinkel bei (001) und ebenso für (121). Nun ist Dreieck (211), (121), (001) bestimmt durch zwei Seiten (211) : (001) und (121) : (001) und den Winkel bei (001) (= der Differenz der beiden Hauptwinkel).

Monoklines System.

Stereographische Projektion. Fig. 68 zeigt die stereographische Projektion eines monoklinen Kristalles auf die übliche Zeichnungsebene (senkrecht zur vertikalen c-Achse). Man kann also immer sofort die Pole (010) und (100) nebst den zugehörigen Gegenpolen eintragen. Ferner zeichne man gleich die als Gerade sich darstellende Hauptzone durch (100). Auf den beiden Hauptzonen zeichne man dann im richtigen Abstand die gemessenen Pole ein und erhält nun durch je zwei Pole weitere Großkreise.

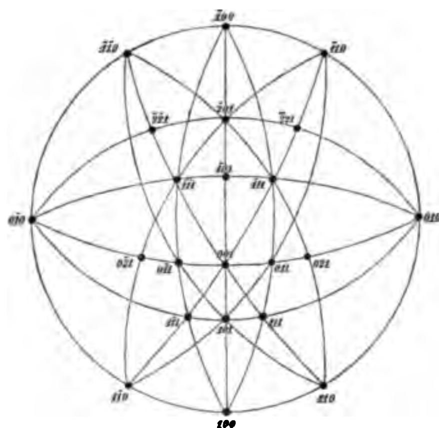


Fig. 68.

Ist auf unseren beiden Hauptzonen nicht die nötige Anzahl von Winkeln zur Verfügung, so können unter Umständen einige Hilfskonstruktionen nötig werden. Das dann anzuwendende Verfahren sei an einigen Beispielen erläutert:

1. Gegeben (100) : (101), (101) : $(\bar{1}01)$ und (011) : (010).

Man berechne (Seite 57, Formel 10) oder konstruiere in der bekannten Zone [100 : 001] den Winkel (100) : (001) und trage nun die Pole (100), (101), (001), $(\bar{1}01)$ auf dem Durchmessergroßkreis ab. Durch (001) lege

man den Großkreis [001 : 010] und trage darauf den Pol (011) ab. Weitere Großkreise ergeben sich dann auf einfachem Wege.

2. Gegeben (100) : (001), (111) : $(1\bar{1}1)$, (100) : (111).

Man erhält Dreieck (100), (010), (111) nach Seite 13 direkt. Man lege den Großkreis [010 : 111], welcher auf dem Durchmessergroßkreis (101) liefert. Auch trage man (001) ab. Dann sind die Grundlagen für weitere Großkreise und die Hauptwinkel gegeben.

3. Gegeben (111) : $(1\bar{1}1)$, (111) : $(\bar{1}11)$ und $(1\bar{1}1)$: $(\bar{1}11)$ (Fig. 69).

Man trage auf dem Grundkreis die Pole (010), (101), (111) und $(1\bar{1}1)$ ab und konstruiere davon aus Dreieck $(1\bar{1}1)$, (111), $(\bar{1}11)$. Die Zone [111 : $\bar{1}11$] schneidet den Durchmessergroßkreis in $(\bar{1}00)$, ebenso die Zone [$1\bar{1}1$: $\bar{1}11$] in (001). Den Abstand $(\bar{1}00)$: (001) mißt man. Nun geht man zur Projektion auf die übliche Ebene über. Zu deren Ausführung kennt man jetzt $(\bar{1}00)$: (001); (001) : (011) und (011) : $(\bar{1}11)$ und damit genügend Pole zur weiteren Entwickelung der Projektion.

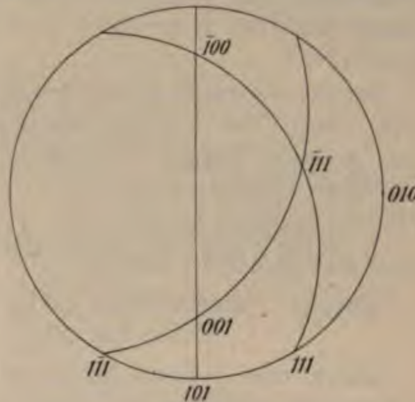


Fig. 69.

Zur Eintragung eines beliebigen Poles aus den gegebenen Indizes bestimmt man (Fig. 68) zwei Hauptwinkel, etwa bei (100) und (001) und zieht dann unter diesen Neigungswinkeln den Großkreis durch (100), bzw. (001). Hat man einen beliebigen Pol p_1 aus seiner Neigung gegen zwei bekannte Pole p_2 und p_3 einzutragen, dann bestimmt man im Dreieck p_1, p_2, p_3 in einer Nebenkonstruktion vom Grundkreis ausgehend einen Winkel (bei p_2 oder bei p_3) und zieht nachher in der eigentlichen Projektion durch p_2 (bzw. p_3) unter diesem Winkel den Großkreis und trägt auf diesen den Abstand $p_2 : p_1$ ab.

Berechnung der Elemente.

Die Elemente eines monoklinen Kristalles sind:

$$a : b : c = x : 1 : y;\ \beta.$$

(Beispiel: Epidot $a : b : c = 2{,}8914 : 1 : 1{,}8057$; $\beta = 98^\circ 57'$ Kokscharow.

Dies sind drei zu berechnende Größen. Aus der Grundgleichung folgt, daß zur Berechnung drei voneinander unabhängige Messungen nötig sind.

a) Für die sphärisch-trigonometrische Berechnung ist das Vorkommen von rechtwinkeligen Dreiecken zu berücksichtigen. Es sind zur Zone [100 : 001] alle Zonen durch (010) senkrecht. Die Scheitel der rechten Winkel liegen also auf dem Durchmessergroßkreis. Der Hauptwinkel für

$a':b'$ einer Form (pqr) liegt bei (001) im Dreieck (001), (100), (pqo), jener für $c':b'$ bei (100) im Dreieck (100), (001), (oqr); $\beta = 180 - (100):(001)$.

Das Rechnungsverfahren sei an folgenden Fällen erläutert:

1. Gegeben Zone [100 : 001] und eine Zone durch (010).

Beispiel. Gegeben (100) : (101) und (101) : ($\bar{1}$01);
(101) : (111).

Man berechnet (100) : (001) aus dem rationalen Doppelverhältnis.

Man trägt zwecks Darstellung in stereographischer Projektion auf dem Durchmessergroßkreis (100), (101), ($\bar{1}$01) und (001), zieht Zone [101 : 010] und zeichnet darauf (111) und zieht dann den Großkreis [100 : 111], ferner [001 : 111]. Bei graphischer Berechnung erhält man direkt den Hauptwinkel bei (100), dessen tg $= c:b$, eben den Hauptwinkel bei (001), dessen tg $= a:b$.

Bei der eigentlichen Berechnung erhält man im rechtwinkeligen Dreieck (100), (111), (101) aus den zwei Katheten den Winkel bei (100) — tg $\eta_1 =$ $= c:b$ und im Dreieck (101), (001), (111) aus den zwei Katheten den Winkel bei (001) — tg $\eta_3 = a:b$.

2. Gegeben zwei Zonen durch (010) und ein Winkel zwischen zwei Polen dieser Zonen.

Beispiel. Gegeben (010) : ($\bar{1}$11) und (010) : (111);
ferner ($\bar{1}$11) : (111).

Durch eine einfache Hilfskonstruktion kommt man zur Kenntnis der Zone [100 : 001] (Fig. 70). Man konstruiere, vom Grundkreis ausgehend, aus seinen drei Seiten das Dreieck (111), ($\bar{1}$11), (010). Auf dem Durchmessergroßkreis liefert dies den Abstand der Schnittpunkte ($\bar{1}$00), ($\bar{1}$01) und (101). Diese Punkte trage man nun in die eigentliche Projektion ein und ziehe die Zonen durch (010) und zeichne auf [$\bar{1}$01 : 010] den Pol ($\bar{1}$11) und auf [101 : 010] den Pol (111) ein, ebenso (1$\bar{1}$1). Zieht man [1$\bar{1}$1 : $\bar{1}$11], dann erhält man (001) auf dem Durchmessergroßkreis. Die Zonen [001 : 111] und [100 : 111] sind nun auch noch zu zeichnen, womit alle Hauptwinkel bestimmt sind.

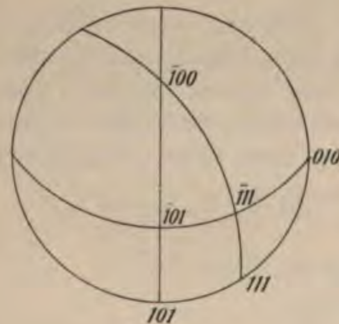


Fig. 70.

Bei der eigentlichen Berechnung (Fig. 68) ermittelt man im gegebenen schiefwinkeligen Dreieck ($\bar{1}$11), (111), (010) die Winkel bei ($\bar{1}$11) und (010). Letzterer Winkel ist gleich (101) : ($\bar{1}$01). Mit Hilfe der Winkel bei ($\bar{1}$11) kann man das rechtwinkelige Dreieck ($\bar{1}$00), ($\bar{1}$01), ($\bar{1}$11) berechnen, nämlich den Winkel bei ($\bar{1}$00) als Hauptwinkel für $c:b$ und Seite ($\bar{1}$00) : ($\bar{1}$01). In Zone [100 : 001], welche nun bestimmt ist, liefert das rationale Doppelverhältnis (100) : (001). Die übrigen Winkel liefern in ebenen Dreiecken $a:c$.

Sind die Zonen durch (010) Hauptzonen 1. Ranges, dann ist die Rechnung noch etwas vereinfacht.

3. Gegeben eine beliebige Zone und eine solche durch (010) (wobei nicht beide Zonen durch den gleichen Punkt auf [100 : 001] gehen).

Beispiel. Gegeben $(1\bar{1}0):(101)$ und $(101):(011)$;
ferner $(011):(010)$.

Bei der exakten Rechnung berechnet man (Fig. 68) im rechtwinkeligen Dreieck (001), (101), (011) den Bogen (001) : (101) und den Winkel bei (101). Dann berechnet man in Dreieck $(1\bar{1}0)$, (101), (100) den Bogen (100) : (101). Jetzt kennt man $(100):(001) = 180 - \beta$ und die nötigen Stücke zur Berechnung von $a:c$ und kann nun in Dreieck (100), (001), (011) bei (100) einen Hauptwinkel erhalten für $c:b$.

4. Gegeben drei Winkel zwischen drei Polen.

Beispiel. $(111):(1\bar{1}1)$, $(111):(\bar{1}11)$ und $(1\bar{1}1):(\bar{1}11)$.

Die Darstellung in stereographischer Projektion siehe Fig. 69.

Bei der eigentlichen Berechnung ermittelt man im gegebenen Dreieck (111), $(1\bar{1}1)$, $(\bar{1}11)$ den Winkel bei $(1\bar{1}1)$. Jetzt kann man in Dreieck $(1\bar{1}1)$, (010), $(\bar{1}11)$ den Bogen $(010):(\bar{1}11)$ ermitteln und hat nun Fall 2.

b) Berechnung mit Hilfe der Grundgleichungen.

1. Die Hauptgleichung wird in diesem System

$$\cos V = \frac{\lambda^2 hp + qk + rl\nu^2 + M(hr + lp)}{\sqrt{\lambda^2 h^2 + k^2 + \nu^2 l^2 + 2Mhl} \cdot \sqrt{\lambda^2 p^2 + q^2 + \nu^2 r^2 + 2Mpr}}.$$

2. Gleichungen für die Zonenrechnung:

a) für eine beliebige Zone: Formeln 9—11 (Seite 57);

b) für die speziellen Zonen durch (010): Formeln 12 (Seite 59).

Die speziellen Formeln, welche sich aus dem Cosinussatz ableiten, sind:

I.

$$\frac{M}{\nu\lambda} = \cos(100):(001). \qquad (2')$$

II.

Für die Hauptzonen 1. Ranges:

$$\lambda = \frac{q}{p} \cdot \operatorname{tg}(010):(pqo), \qquad (4')$$

$$\frac{\lambda}{\nu} = \frac{r}{p} \cdot \frac{\sin(001):(por)}{\sin(100):(por)}, \qquad (5')$$

$$\nu = \frac{q}{r} \cdot \operatorname{tg}(010):(oqr). \qquad (6')$$

III.

Für die Hauptzonen 2. Ranges:

$$\left.\begin{aligned}\frac{q^2 + r^2\nu^2}{p^2\lambda^2} &= \left[\frac{\sin(100):(pqr)}{\sin(oqr):(pqr)}\right]^2\\ \frac{rM}{p\lambda^2} &= \cos(100):(oqr)\cdot\frac{\sin(100):(pqr)}{\sin(oqr):(pqr)}\end{aligned}\right\}, \qquad (7')$$

$$\frac{p^2\lambda^2 + r^2\nu^2 + 2prM}{q^2} = [\mathrm{tg}(010):(pqr)]^2, \qquad (8')$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{p^2\lambda^2 + q^2}{r^2\nu^2} &= \left[\frac{\sin(001):(pqr)}{\sin(pqo):(pqr)}\right]^2\\ \frac{p}{r}\cdot\frac{M}{\nu^2} &= \cos(001):(pqo)\cdot\frac{\sin(001):(pqr)}{\sin(pqo):(pqr)}\end{aligned}\right\}. \qquad (9')$$

Für die Berechnung wird man die drei Fundamentalwinkel tunlichst so wählen, daß Hauptzonen 1. oder 2. Ranges bestimmt sind. Sollte eine solche Auswahl nicht möglich sein, dann führt meist eine vorherige kurze sphärisch-trigonometrische Rechnung auf einen der im folgenden behandelten Hauptfälle. Eine solche Berechnung eines sphärischen Dreieckes wendet man auch dann als zweckmäßiges Hilfsmittel an, wenn man aus den Angaben leicht auf eine Hauptzone durch (010) gelangt.

Die analytische Rechnungsmethode hat wiederum Vorzüge, wenn man flächenreichere Kombinationen zu bestimmen hat. Auch ermöglicht sie die Berechnung in Fällen, wo die sphärisch-trigonometrische Rechnung versagt.

1. Gegeben Zone [100 : 001], etwa durch die Winkel (001) : (101) und (001) : ($\bar{1}$01);
   ferner (101) : (110).

Man berechnet zuerst aus dem rationalen Doppelverhältnis (100) : (001). Gleichung (2′) liefert dann $\frac{M}{\lambda\nu}$, ferner Gleichung (5′) $\frac{\lambda}{\nu}$.

Nun berechnet man (100) : (110) aus dem rechtwinkeligen Dreieck (100), (101), (110) und dann liefert Gleichung (4′) direkt λ.

2. Gegeben Zone [010 : 101] und Zone [010 : 10$\bar{1}$];
   ferner (10$\bar{1}$) : (111).

Gleichung (8′) ergibt $\lambda^2 + \nu^2 + 2M$ und $\lambda^2 + \nu^2 - 2M$, also M und $\lambda^2 + \nu^2$. Aus dem dritten Winkel ergibt sich:

$$\cos(10\bar{1}):(111) = \frac{\lambda^2 - \nu^2}{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2 - 2M}\cdot\sqrt{\lambda^2 + 1 + \nu^2 + 2M}}; \text{ also } \lambda^2 - \nu^2 \text{ usw.}$$

3. Gegeben Zone [100 : 011], etwa durch die beiden Winkel (100) : (111) und (111) : (011);
   ferner eine Zone durch (010), etwa durch den Winkel (111) : (010).

Die Gleichungen (7′) liefern $\frac{1+\nu^2}{\lambda^2}$ und $\frac{M}{\lambda^2}$; ebenso Gleichung (8′) $\lambda^2 + \nu^2 + 2M$.

Die weitere Auflösung ist einfach.

Ganz ähnlich ist der Fall, wenn eine Hauptzone 2. Ranges durch (001) gegeben ist.

4. Gegeben: (100) : (001); (001) : (011) und (001) : (110).

Gleichung (2′) liefert $\frac{M}{\lambda\nu}$ aus (100) : (001).

Gleichung (6′) liefert ν aus (010) : (011).

Der dritte Winkel ergibt noch $\cos(001):(110) = \frac{M}{\nu\cdot\sqrt{\lambda^2+1}} = \frac{M}{\nu\lambda\cdot\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}}$, woraus sich zunächst λ^2+1 berechnet.

Berechnung von Indizes und Winkeln.

Bei der Ermittelung der Indizes einer Fläche wiederholen sich die beim triklinen System behandelten Fälle. Dabei treten mit Rücksicht auf die höhere Symmetrie bedeutende Vereinfachungen auf.

Zur genauen Berechnung des Winkels zwischen zwei Flächenpolen mit bekannten Indizes benutze man die Hauptformeln. Man ermittelt zuerst die wichtigsten Winkel in den Hauptzonen und kann diese dann mit Hilfe der Gleichungen für das rationale Doppelverhältnis weiter entwickeln. Bei einer beliebigen Zone berechnet man zuerst den Winkel zwischen drei Polen mit einem Index = 0 und entwickelt dann die Zone auf Grund der Beziehungen des rationalen Verhältnisses weiter.

Siehe auch die speziellen Gleichungen auf Seite 59 und 85.

Rhombisches System.

Stereographische Projektion. Fig. 71 zeigt die Projektion eines rhombischen Kristalles auf die Ebene senkrecht zur vertikalen c-Achse. (100), (010) kann man sofort eintragen, ebenso die dadurch bestimmten Durchmesser, welche sich in (001) schneiden. Ist auf zwei dieser Zone je ein weiterer Pol durch seine Neigung gegeben, z. B. (011) und (110), dann kann man den ganzen Komplex weiter entwickeln. Auch allgemeinere Fälle sind hier ganz einfach, z. B.

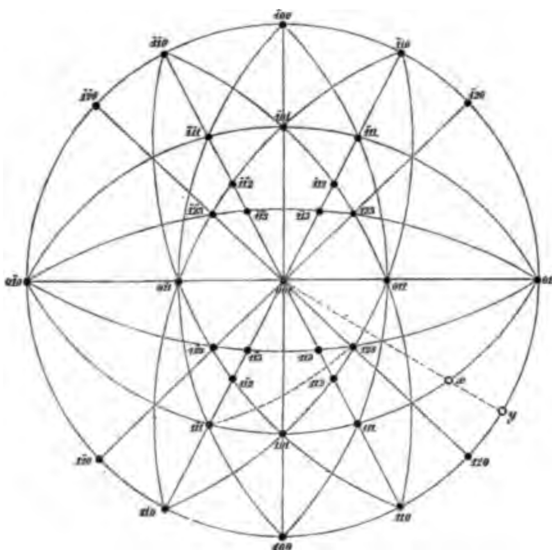


Fig. 71.

1. Gegeben (111) : (1$\bar{1}$1) und (111) : ($\bar{1}$11). Man kann direkt Pol (111) finden als Schnittpunkt zweier Kleinkreise, des einen um (100)

mit dem Radius $90 - \frac{(111):(\bar{1}11)}{2}$, des anderen um (010) mit dem Radius $90 - \frac{(111):(1\bar{1}1)}{2}$.

2. Gegeben $(111):(\bar{1}11)$ und $(111):(11\bar{1})$. Man beschreibt um (100) den Kleinkreis mit dem Radius $90 - \frac{(111):(\bar{1}11)}{2}$ und dreht nun die Zeichnung, bis der Kleinkreis den vertikalen Durchmesser des Netzes im Abstand $90 - \frac{(111):(11\bar{1})}{2}$ trifft. Zieht man hierdurch und den Mittelpunkt die Gerade, dann hat man die Pole (111) und (110).

Nur einzelne isolierte Pole erfordern eine gesonderte Konstruktion, hauptsächlich wenn nur zwei Winkel zu Polen innerhalb des Grundkreises gegeben sind, z. B. gegeben Pol p innerhalb des Grundkreises durch die Abstände $p:(001)$ und $p:(111)$. Als Nebenkonstruktion konstruiere man Dreieck p, (001), (111) aus seinen drei Seiten, mit Seite (001):(111) auf dem Grundkreis. Man mißt darin den Winkel bei (001), was nun in der eigentlichen Projektion den Durchmesser [001 : p] liefert. Im gegebenen Abstand findet man hierauf p.

Berechnung der Elemente.

Die Elemente eines rhombischen Kristalles sind

$$a:b:c = x:1:y.$$

(Beispiel. Aragonit $a:b:c = 0{,}6228:1:0{,}7204$ Beckenkamp.)

Dies enthält zwei zu berechnende Größen; es sind also in Übereinstimmung mit der Grundformel zwei Fundamentalwinkel nötig.

a) Sphärisch-trigonometrische Berechnung.

Die Hauptwinkel ergeben sich jetzt alle aus rechtwinkeligen Dreiecken. Ihr Tangens liefert direkt $a:b$, bzw. $c:b$, bzw. $a:c$.

Das einfache Rechnungsverfahren erläutern folgende Beispiele:

1. Gegeben zwei Hauptzonen, z. B. (110):(100) und (010):(011)

$$\operatorname{tg}(110):(100) = a:b \text{ und } \operatorname{tg}(001):(011) = c:b.$$

2. Gegeben (010):(011) und (010):(111).

Ersterer Winkel liefert $\operatorname{tg}(001):(011) = c:b$. Das rechtwinkelige Dreieck (111), (011), (010) ergibt den Winkel bei (010). Dieser ist gleich dem Abstand (101):(001), dessen $\operatorname{tg} = c:a$.

3. Gegeben $(111):(\bar{1}11)$ und $(111):(11\bar{1})$.

In Dreieck (001), (111), (011) kennt man die nötigen Stücke, um den Abstand (001):(011) und den Winkel bei (001) zu berechnen. Tangens des ersteren ist gleich $c:b$, Cotangens des letzteren ist gleich $a:b$.

b) Berechnung mit Hilfe der Grundgleichungen.

1. Die Hauptgleichung wird:

$$\cos V = \frac{\lambda^2 hp + kq + rl\nu^2}{\sqrt{\lambda^2 h^2 + k^2 + \nu^2 l^2} \cdot \sqrt{\lambda^2 p^2 + q^2 + \nu^2 r^2}}.$$

2. Berechnung innerhalb von Zonen:
   a) Beliebige Zone: Formel 9—11 (Seite 57).
   b) Hauptzonen: Formeln (Seite 60).

Die speziellen Formeln werden:

II.

für die Hauptzonen 1. Ranges

$$\lambda = \frac{q}{p} \cdot \operatorname{tg}(010):(pqo) \qquad (4')$$

$$\frac{\lambda}{\nu} = \frac{r}{p} \cdot \operatorname{tg}(001):(por) \qquad (5')$$

$$\nu = \frac{q}{r} \cdot \operatorname{tg}(010):(oqr); \qquad (6')$$

III.

für die Hauptzonen 2. Ranges

$$\frac{q^2 + r^2\nu^2}{p^2\lambda^2} = [\operatorname{tg}(100):(pqr)]^2 \qquad (7')$$

$$\frac{p^2\lambda^2 + r^2\nu^2}{q^2} = [\operatorname{tg}(010):(pqr)]^2 \qquad (8')$$

$$\frac{p^2\lambda^2 + q^2}{r^2\nu^2} = [\operatorname{tg}(001):(pqr)]^2. \qquad (9')$$

IV.

Für eine beliebige Zone $[pqr]$ ergeben sich ebenfalls einfache Beziehungen; diese Zone schneidet die drei Hauptzonen in den Polen $(q\bar{p}o)$, $(\bar{r}op)$ und $(or\bar{q})$. Man bildet also aus der Hauptgleichung

$\cos(q\bar{p}o):(or\bar{q})$, daraus $\sin(q\bar{p}o):(or\bar{q})$ und dann $\operatorname{cotg}^2(q\bar{p}o):(or\bar{q})$;
ebenso $\cos(q\bar{p}o):(\bar{r}op)$, daraus $\sin(q\bar{p}o):(\bar{r}op)$ und dann $\operatorname{cotg}^2(q\bar{p}o):(\bar{r}op)$;
ebenso $\cos(or\bar{q}):(\bar{r}op)$, daraus $\sin(or\bar{q}):(\bar{r}op)$ und dann $\operatorname{cotg}^2(or\bar{q}):(\bar{r}op)$.

Dies gibt die einfachen Gleichungen

$$\lambda^2 = \frac{p^2}{q^2} \cdot \frac{\operatorname{cotg}(q\bar{p}o):(\bar{r}op)}{\operatorname{cotg}(q\bar{p}o):(or\bar{q})} \qquad (10')$$

$$\nu^2 = \frac{r^2}{q^2} \cdot \frac{\operatorname{cotg}(or\bar{q}):(\bar{r}op)}{\operatorname{cotg}(q\bar{p}o):(or\bar{q})}. \qquad (11')$$

Man berechnet aus den Symbolen der beiden gemessenen Pole das Symbol der Zone $[pqr]$ und daraus aus dem rationalen Doppelverhältnis die drei obigen Winkel.

Beispiele für die Berechnung bei zwei gegebenen Hauptzonen sind überflüssig.

Berechnung der Indizes.

Die Berechnung der Indizes kann in vielen Fällen mit Hilfe der speziellen Formeln erfolgen, nämlich:

1. Man benutzt eine der Formel (4'), (5') und (6'), wenn die gesuchte Form in einer Hauptzone 1. Ranges liegt.

2. Man benutzt je zwei Formeln (7'), (8') und (9'), wenn man die Winkel des gesuchten Poles zu zwei Hauptpolen kennt.

In beiden Fällen setzt man einen der Indizes zuerst gleich 1.

3. In anderen Fällen kann man die Messungen so einrichten, daß in einer Hauptzone 2. Ranges der Winkel des gesuchten Poles zu einer bekannten Fläche dieser Zone gegeben ist. Dann liefert eine einzige der Gleichungen (7'), (8') oder (9') den dritten Index, nachdem zwei Indizes durch die Zugehörigkeit zur Zone bekannt sind.

Die graphische Ermittelung der Indizes erfolgt auf dieselbe Weise wie im triklinen System (Seite 70 und Seite 81), nur mit bedeutenden Vereinfachungen des Verfahrens, welche leicht sich ergeben.

Berechnung von Winkeln zwischen Flächen.

Zur Berechnung von Winkeln innerhalb von Hauptzonen 1. Ranges dienen die Formeln (4'), (5') oder (6'), bei Winkeln innerhalb von Zonen 2. Ranges eine der Formeln (7'), (8') oder (9') (— Beispiele liefert die Berechnung der Kantenwinkel von Pyramiden). Der Winkel zwischen zwei beliebigen Flächen wird mit Hilfe der Cosinusformel (Seite 89) berechnet.

Tetragonales System.

Stereographische Projektion. Fig. 72 zeigt die Projektion eines tetragonalen Kristalles auf die übliche Ebene, senkrecht zur vertikalen c-Achse. Die Hauptformen {100}, {001}, {110} können ohne weiteres eingetragen werden, ebenso beliebige Pole auf den drei Hauptzonen 1. Ranges aus ihrem Winkelabstand von den Hauptpolen. Aus der Figur ersieht man ferner, daß zu jedem Durchmesser-Großkreis ein dazu senkrechter Durchmesser-Großkreis existiert, z. B. zu $[3\bar{1}0:001]$ die Zone $[130:001]$.

Im besonderen ist nur die Eintragung wichtiger Formen aus ihren Kantenwinkeln zu behandeln. Von einer Pyramide 1. Art, z. B. von {111} erhält man aus dem Polkantenwinkel A die Fläche (111) als den Schnittpunkt zweier Kleinkreise um (100) und (010) mit dem Radius $90 - \frac{A}{2}$. Das Bisphenoid {111} erhält man aus dem Seitenkantenwinkel B durch

den Schnittpunkt zweier Kleinkreise mit dem Radius $\frac{B}{2}$ um die gleichen Pole (100) und (010).

Um eine ditetragonale Pyramide aus ihren beiden Polkantenwinkeln A und B, z. B. {311}, einzutragen, beginnen wir mit einem Pol im vorderen oberen rechten Oktanten, also etwa mit (311). Man erhält diesen Pol als Schnittpunkt zweier Kleinkreise, nämlich um (010) mit dem Radius $90 - \frac{B}{2}$ und um (1$\bar{1}$0) mit dem Radius $90 - \frac{A}{2}$.

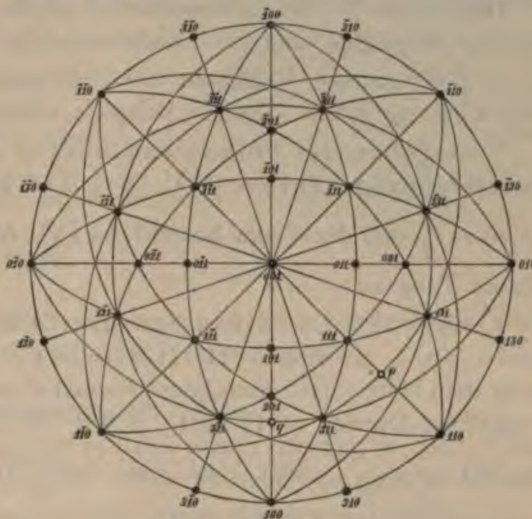


Fig. 72.

Ähnlich verfährt man, wenn ein Polkantenwinkel A (z. B. (311) : (131)) und der Winkel an der horizontalen Kante D gegeben ist. Man ziehe um (1$\bar{1}$0) den Kleinkreis mit dem Radius $90 - \frac{A}{2}$ und drehe die Zeichnung, bis dieser Kleinkreis im Abstand $90 - \frac{D}{2}$ den vertikalen Durchmesser des Netzes trifft. Dieser Schnittpunkt ist dann in unserem Falle der gesuchte Pol (311).

Für die Ermittelung eines Flächenpoles eines Trapezoeders aus zwei Kantenwinkeln sei folgende Erläuterung am Trapezoeder {311} vorausgeschickt. Die beiden Pole (311) und (1$\bar{3}$1) mit dem Polkantenwinkel A dieser Form liegen auf zwei zueinander senkrechten Durchmessern im gleichen Abstand von (001). Man legt also zunächst nur (001) fest und zieht zwei zueinander senkrechte Durchmesser. Nun dreht man die Figur, bis der Äquator des Netzes den Winkel der beiden Durchmesser halbiert und zieht jenen Großkreis, auf welchem die beiden Durchmesser eben ein Stück, gleich A, herausschneiden. Die beiden Endpunkte sind (311) und (1$\bar{3}$1). Ferner sei der Winkel B an der Kante (311) : (3$\bar{1}\bar{1}$) gegeben. Nun suche man erst auf dem Grundkreis den Pol (100), indem man solange dreht, bis durch (311) der Kleinkreis mit dem Radius $\frac{B}{2}$ geht. Der jetzt über dem zugehörigen Hauptpol des Netzes liegende Punkt ist (100). Nun kann man die übrigen wichtigeren Pole eintragen.

Um eine beliebige Fläche (pqr) aus ihren Indizes einzutragen, berechnet oder konstruiert man (100) : (pqo) und (001) : (oqr) und erhält nun (pqr) als Schnittpunkt der beiden Großkreise [001 : pqo] und [100 : oqr].

Berechnung der Elemente.

Bei einem tetragonalen Kristalle haben die Elemente die Form

$a : c = 1 : x$ (z. B. $= 1 : 0{,}3857$ Zinnerz).

Dies bedeutet eine zu berechnende Größe; dazu ist in Übereinstimmung mit der Hauptgleichung ein Fundamentalwinkel nötig.

a) Das einfache Verfahren bei der sphärisch-trigonometrischen Berechnung sollen folgende Beispiele erläutern:

1. Gegeben der Polkantenwinkel A der Grundpyramide {111}. Im rechtwinkeligen Dreieck (011), (001), (111) kennt man die Seite (011):(111) $= 90 - \frac{A}{2}$ und der Winkel bei (001) ist 45°. Also berechnet man (001):(011), dessen Tangens $= c : a$.

2. Gegeben ein Polkantenwinkel A einer ditetragonalen Pyramide (pqr). (Beispiel: (311):(131) $= A$.) Ohne Kenntnis der Elemente kann man (110):(310) berechnen (Formel 4' unten). Dieses liefert im rechtwinkeligen Dreieck (001), (311), p (Fig. 72) den Winkel bei (001); ferner ist (311)$:p = \frac{A}{2}\cdot$ Man kann also (001):(311) berechnen. Damit kann man aber in dem Dreieck (001), q, (311) den Bogen (001)$:q$ berechnen. Dessen Tangens ist gleich $c' : a'$; daraus erhält man dann $c : a$, nachdem $q = (301)$.

b) Berechnung mit Hilfe der Grundgleichungen.

1. Hauptgleichung

$$\cos V = \frac{hp + kq + lr\nu^2}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2\nu^2} \cdot \sqrt{p^2 + q^2 + r^2\nu^2}}.$$

2. Formeln für die Rechnung in Zonen Seite 60.

Die speziellen Formeln sind:

II.

$$1 = \frac{q}{p} \operatorname{tg} (010) : (pqo) \qquad (4')$$

$$\nu = \frac{q}{r} \operatorname{tg} (010) : (oqr). \qquad (6')$$

III.

Für die Hauptzonen 2. Ranges:

$$\frac{p^2 + r^2\nu^2}{q^2} = [\operatorname{tg} (010) : (pqr)]^2 \qquad (8')$$

$$\frac{p^2 + q^2}{r^2\nu^2} = [\operatorname{tg} (001) : (pqr)]^2. \qquad (9')$$

Die Formeln finden Anwendung für folgende Messungen:

Basiskante einer Pyramide 2. Art — Formel (6');

Polkante einer Pyramide 1. Art oder vordere Polkante $(pqr):(p\bar{q}r)$ einer ditetragonalen Pyramide — Formel (8');

Basiskante einer Pyramide 1. Art oder einer ditetragonalen Pyramide — Formel (9').

Für die Polkante einer Pyramide 2. Art ergibt die Hauptformel

$$\cos(por):(opr) = \frac{r^2\nu^2}{p^2 + r^2\nu^2}. \qquad (10')$$

Für die Kante $(pqr):(qpr)$ einer ditetragonalen Pyramide gilt

$$\cos(pqr):(qpr) = \frac{2pq + r^2\nu^2}{p^2 + q^2 + r^2\nu^2}. \qquad (11')$$

Ähnliche Gleichungen, welche in bezug ν^2 vom ersten Grade sind, liefert auch jeder der Kantenwinkel eines Trapezoeders.

Berechnung der Indizes.

Die exakte Berechnung der Indizes einer Fläche ist hier in vielen Fällen mittelst einfacher Formeln möglich. Dies ist nicht nur, wie in anderen Systemen, dann der Fall, wenn 1. eine Fläche durch zwei Zonen,

2. in einer bekannten Zone eine Fläche durch ihre Neigung gegen eine andere bestimmt ist, sondern man berechnet auf einfachem Wege auch die Indizes

3. einer Pyramide 1. Art aus dem Polkantenwinkel — Formel (8') oder aus dem Basiskantenwinkel — Formel (9');

4. einer Pyramide 2. Art aus dem Polkantenwinkel — Formel (10') oder aus dem Basiskantenwinkel — Formel (9');

5. jeder beliebigen Fläche aus ihrem Abstand von zwei Hauptpolen — Hauptformel für $\cos V$.

Auf letztere Aufgaben gelangt man bei den allgemeineren Fällen durch eine einfache sphärisch-trigonometrische Rechnung, wie folgende Beispiele dartun:

1. Eine ditetragonale Bipyramide (pqr) aus ihren beiden Polkantenwinkeln $(pqr):(p\bar{q}r) = A$ und $(pqr):(qpr) = B$ zu berechnen. Es ist $(010):(pqr) = 90 - \frac{A}{2}$. Ferner ist in Dreieck $(1\bar{1}0)$, (010), (pqr) der Abstand $(1\bar{1}0):(pqr) = 90 - \frac{B}{2}$, $(010):(pqr) = 90 - \frac{A}{2}$ und $(1\bar{1}0):(010) = 135°$. Man berechne also den Winkel bei (010) und hierauf im rechtwinkeligen Dreieck (pqo), (010), (pqr), den Bogen $(pqo):(010)$. Gleichung (4') liefert also jetzt p, wenn man $q = 1$ setzt. $\cos(010):(pqr)$ ergibt dann noch r.

2. Die Indizes (pqr) eines Trapezoeders zu berechnen aus $(pqr):(q\bar{p}r) = A$ (Polkante) und $(pqr):(qp\bar{r}) = B$. Das gleichschenkelig-

rechtwinkelige Dreieck (pqr), (001), $(q\bar{p}r)$ liefert aus $(pqr):(q\bar{p}r) = A$ $(pqr):(001)$. Nun berechnet man in dem rechtwinkeligen Dreieck (pqr), (pqo), (110) aus dem gefundenen Werte $(pqr):(pqo)$ und $(pqr):(110) = \frac{B}{2}$ den Bogen $(pqo):(110)$ und kennt nun $(pqo):(010)$. Zur Anwendung kommen nun Gleichung (4') und $\cos(001):(pqr)$.

Bei graphischer Berechnung (etwa mit Hilfe des Wulffschen Netzes) trägt man den zu bestimmenden Pol (pqr) auf Grund der Winkelmessungen in die stereographische Projektion ein. Der Durchmessergroßkreis $(001):(pqr)$ liefert auf dem Grundkreis den Abstand $(100):(pqo)$ und eine zweite Hauptzone, etwa $[100:pqr]$, auf einem Durchmessergroßkreis $(001):(oqr)$. Daraus kann man $a':b':c'$ mit Hilfe der einfachen Formeln berechnen oder auch mit Hilfe ebener rechtwinkeliger Dreiecke konstruieren.

Berechnung der Winkel von Formen und zwischen einzelnen Flächen. Die Hauptformel liefert in allen Fällen einen einfach zu berechnenden Ausdruck; in besonderen Fällen benutzt man die speziellen Formeln.

Kubisches System.

Stereographische Projektion. Die Projektion der wichtigsten Formen auf die Ebene parallel der Fläche (001) zeigt Fig. 73. Die Eintragung der Hauptformen, des Hexaeders {100} und Rhombendodekaeder (110) (mit oder ohne Benutzung eines Netzes) ergibt sich von selbst. Die dadurch bestimmten Zonen ergeben in ihrem Schnittpunkt die Oktaederpole {111}; letztere können aber auch direkt abgetragen, z. B. (111) auf dem Durchmessergroßkreis [001:110] durch seinen Abstand $(001):(111) = 54^\circ 44\frac{1}{2}'$.

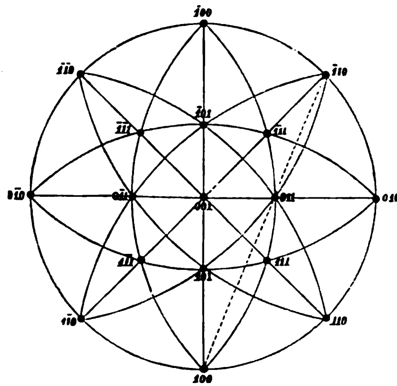


Fig. 73.

In Fig. 74 sind nun noch die Pole weiterer Formen eingetragen. So liegt z. B. von jedem Ikositetraeder ein Pol auf [001:110] und zwar zwischen (001) und (111), ebenso von jedem Triakisoktaeder ein Pol auf [101:010] und zwar zwischen (101) und (111). Unter Berücksichtigung der vorderen oberen rechten Oktanten gilt für die drei Ikositetraederpole (vergl. {211})

$$(001):(qqp) = (100):(pqq) = (010):(qpq);$$

ebenso

$$(101):(qqp) = (110):(pqq).$$

Für ein Triakisoktaeder (vergl. {221}) gilt:

$$(001):(pqp) = (100):(pqp);$$
$$(101):(pqp) = (110):(ppq).$$

Man kann also jede dieser Formen aus der Neigung einer ihrer Flächen gegenüber einer Hexaeder-, Rhombendodekaeder- oder Oktaederfläche eintragen. Für das Ikositetraeder {311} sei ermittelt (101) : (113) = 31° 29′. Dieser Winkel ist auch gleich (110) : (311). Man zeichne also den Großkreis [100 : 011] und beschreibt um (110) einen Kleinkreis, mit dem Radius 31° 29′. Dies liefert auf [100 : 011] als Schnittpunkt den Pol (311). Der der Projektion zu entnehmende Abstand (100) : (311) liefert auch (001) : (113) auf dem Großkreis [001 : 110] und (010) : (131) auf dem Großkreis [010 : 101].

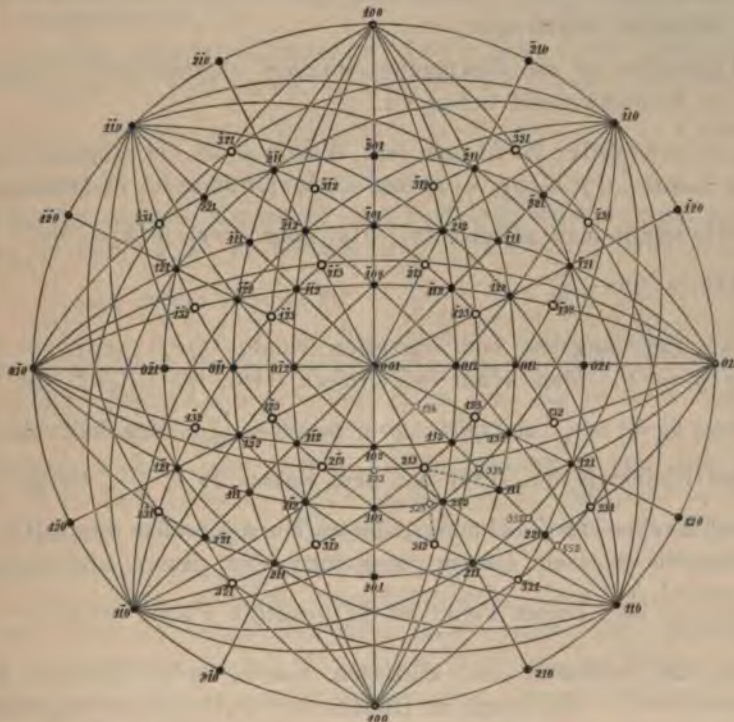


Fig. 74.

Bei der Eintragung eines Triakisoktaeders {*ppq*} aus einem Winkel zu einer der Hauptformen {100}, {110} oder {111} beginnt man mit der Fläche (*ppq*), welcher auf der Zone [001 : 110] zwischen (111) und (110) liegt. Z. B. (001) : (212); man beschreibt um (100) den Kleinkreis mit dem Radius = dem zugehörigen Winkel und findet auf dem Durchmesser [001 : 110] den Pol (221). Pol (212) liegt auf dem Großkreis [010 : 101], wobei (101) : (212) = (110) : (221).

Die Eintragung eines Hexakisoktaeders aus Winkeln zu den Hauptformen sei an folgendem Beispiel dargetan. Gegeben (100) : (321) = *A* und (111) : (321) = *B*. Man trägt (100) und (111) ein und beschreibt dann

um (100) einen Kleinkreis mit dem Radius A; dann dreht man über dem Netz das Zeichnungspapier, bis auf einem Meridian durch (111) der Abstand (111) vom Schnittpunkt mit dem Kleinkreis $= B$ wird. Es ergeben sich zwei solcher Punkte, nämlich (312) und (321), weil (111):(312) $=$ $=$ (111):(321) $=$ (111):(231) usw. (231) liegt dann symmetrisch zu (321) hinsichtlich der Zone [001 : 110]. Ferner erhält man (132), indem auf Großkreis [110 : 231] der Abstand (231):(132) $=$ (312):(321). Zieht man nun Zone [0$\bar{1}$1 : 132], dann erhält man darauf (123), indem (123) : (132) $=$ (321) : (231). Ebenso liegt (213) auf der Zone [$\bar{1}$01 : 312] im Abstand (312):(213) $=$ (321):(231). Damit sind alle Pole (321) im vorderen oberen rechten Oktanten eingetragen.

Im Folgenden ist die Eintragung einzelner allgemeinerer Formen auf Grund von Kantenwinkeln behandelt.

Hexakisoktaeder (hkl): aus dem Winkel a) an der längsten und der mittleren Kante $(qrp):(rqp) = A$ und $(qrp):(q\bar{r}p) = B$. In Dreieck (1$\bar{1}$0), (qrp), (010) kennt man außer (1$\bar{1}$0):(010) noch (qrp):(010) $= 90 - \frac{B}{2}$ und (qrp) : (1$\bar{1}$0) $= 90 - \frac{A}{2}\cdot$

b) An der längsten und kürzesten Kante, $(qrp):(rqp) = A$ und $(qrp):(prq) = C$. Man kennt im Dreieck (1$\bar{1}$0), ($\bar{1}$01), (qrp) die Seiten (1$\bar{1}$0) : $(qrp) = 90 - \frac{A}{2}$ und ($\bar{1}$01) : $(qrp) = 90 - \frac{C}{2}\cdot$ Man findet also (qrp) auf einem Kleinkreis um (1$\bar{1}$0) mit dem Radius $90 - \frac{A}{2}\cdot$ Ferner suche man durch Drehen des Zeichnungspapieres einen Meridian durch ($\bar{1}$01), der vom Kleinkreis in einem Punkte geschnitten wird, dessen Entfernung von ($\bar{1}$01) $90 - \frac{C}{2}$ ist. Dieser Punkt ist die gesuchte Fläche (qrp).

c) An der mittleren und kürzesten Kante, $(qrp):(q\bar{r}p) = B$ und $(qrp):(prq) = C$. Man kennt im Dreieck (010), ($\bar{1}$01), (qrp) die Abstände (qrp):(010) $= 90 - \frac{B}{2}$ und (qrp):($\bar{1}$01) $= 90 - \frac{C}{2}$ und verfährt also ähnlich wie bei b).

Ikositetraeder (pqq). Aus dem Winkel a) einer langen Kante an der vierzähligen Ecke, $(pqq):(p\bar{q}q) = A$. Der gesuchte Pol (pqq) liegt einerseits auf dem Großkreis [100 : 011], anderseits auf einem Kleinkreis um (010) mit dem Radius $90^{\circ} - \frac{A}{2}\cdot$

b) Einer kurzen Kante an einer dreizähligen Ecke, $(pqq):(qpq) = B$; der gesuchte Pol (pqq) liegt auf der Zone [100 : 011] und zugleich auf einem Kleinkreis um (1$\bar{1}$0) mit dem Radius $90^{\circ} - \frac{B}{2}\cdot$

Triakisoktaeder $\{ppq\}$. Aus dem Winkel: a) An einer Oktaederkante $(ppq):(p\bar{p}q) = A$. Es ist natürlich $(101):(ppq) = \frac{A}{2}$ auf dem Großkreis $[101:010]$.

b) An einer kurzen Kante an einem dreizähligen Eck, $(pqp):(qpp) = B$. Pol (pqp) liegt auf dem Großkreis $[010:101]$ und auf einem Kleinkreis um $(1\bar{1}0)$ mit dem Radius $90° - \frac{B}{2}$.

Hexakistetraeder $\{pqr\}$. Aus zwei Winkeln: a) An den zweierlei Kanten zwischen Flächen des gleichen Oktanten — identisch mit Aufgabe b) beim Hexakisoktaeder.

b) An den zweierlei Kanten am spitzen Eck, $(qrp):(prq) = C$ und $(qrp):(\bar{r}\bar{q}p) = D$. Man kennt in Dreieck (110), (qrp), $(\bar{1}01)$ die beiden Seiten $(\bar{1}01):(qrp) = 90 - \frac{C}{2}$ und $(110):(qrp) = 90 - \frac{D}{2}$. Konstruktion ähnlich Aufgabe b) beim Hexakisoktaeder.

c) An den zweierlei Kanten an einer zweizähligen Ecke $(qrp):(rqp) = A$ und $(qrp):(\bar{r}\bar{q}p) = D$. In Dreieck (qrp), $(1\bar{1}0)$, (110) ist $(1\bar{1}0):(qrp) = 90 - \frac{A}{2}$ und $(110):(qrp) = 90° - \frac{D}{2}$.

Tetraedrisches Pentagonikositetraeder $\{pqr\}$. Wir wollen eine solche Form eintragen aus dem Winkel an einer Kante eines vierzähligen Eckes und eines dreizähligen Eckes, $(qrp):(r\bar{q}p) = E$ und $(qrp):(pqr) = F$. Als Beispiel benutze man in Fig. 74 die Eintragung von (321) aus den beiden Winkeln. Zunächst liegen $(qrp) = (213)$ und $(r\bar{q}p) = (1\bar{2}3)$ auf zwei zueinander senkrechten Durchmessern; das gleichschenkelige rechtwinkelige Dreieck (001), $(1\bar{2}3)$, (213) kann man aus der Seite $(1\bar{2}3):(213) = E$ einfach konstruieren und erhält dann $(001):(213)$. Dies liefert einen Kleinkreis um (100) mit dem Radius $(001):(213) = (100):(321)$. Ferner kann man das gleichseitige Dreieck (213), (321), (132) aus den Seiten $= F$, vom Grundkreis ausgehend, gesondert konstruieren. Daraus erhält man schließlich den Abstand $(321):(111)$.

Man zeichne also in der eigentlichen Projektion den Kleinkreis um (100) mit dem Radius $(100):(321)$ und drehe dann das Blatt über dem Netz so lange, bis ein Großkreis durch (111) im Abstand $(111):(321)$ vom Kleinkreis geschnitten wird. Der Schnittpunkt ist (321).

Dyakisdodekaeder. Aus dem Winkel an einer Kante einer dreizähligen Ecke und der kurzen Kante an einer zweizähligen Ecke, $(qrp):(pqr) = F$ und $(pqr):(p\bar{q}r) = G$. (pqr) liegt auf einem Kleinkreis um (010) mit dem Radius $90° - \frac{G}{2}$. Ferner bestimmen die drei Pole in einem Oktanten (pqr), (qrp), (rpq) ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $= F$, wie in der vorigen Aufgabe. Dies liefert, wie vorher, den Abstand $(111):(pqr)$.

Man beschreibt also in der eigentlichen Zeichnung um (010) den Kleinkreis und dreht über dem Netz, bis ein Großkreis durch (111) vom Kleinkreis im Abstand (111) : (pqr) geschnitten wird. Der Schnittpunkt ist (pqr).

Tetraedrisches Deltoiddodekaeder $\{pqr\}$. Für diese Form sei der Fall behandelt: Gegeben der Flächenwinkel an einer stumpfen dreizähligen Ecke und der Winkel an einer horizontalen Kante $(qrp):(pqr) = F$ und $(qrp):(\bar{q}\bar{r}p) = H$. Aus H erhält man direkt einen Kleinkreis um (001) oder besser um (100) mit dem Radius $\frac{H}{2}$. Das gleichseitige Dreieck um die dreizählige Achse liefert den Abstand (111) : (pqr) und nun verfährt man weiter, wie oben beim Pentagonikositetraeder.

Pentagondodekaeder $\{pqo\}$. Die Eintragung auf Grund des Winkels an einer Würfelkante bedarf keiner weiteren Erläuterung. Ist der Winkel zwischen zwei Flächen an der dreizähligen Ecke bekannt $(= F)$, dann konstruiert man nebenher zunächst das gleichseitige Dreieck (pqo), (opq), (qop) aus der Seite F und erhält daraus den Abstand (111) : (pqo). Man dreht alsdann die eigentliche Zeichnung über dem Netz, bis über einem Großkreis (111) in diesem Abstand von dem Hauptpol des Netzes erscheint. Der Punkt über diesem Netzpol ist dann (pqo), bzw. (qpo).

Die Berechnung der Elemente kommt im kubischen System wegen der Identität des Verhältnisses $a:a:a$ in Wegfall.

Berechnung der Indizes.

Formen mit drei verschiedenen Indizes erfordern die Messung von zwei Winkeln, alle übrigen Formen die eines einzigen Winkels.

Dazu benutzt man auch hier am einfachsten die stereographische Projektion. Für jeden eingetragenen Pol (pqr) erhält man mit Hilfe der einzutragenden Hauptzonen die Winkel (100) : (pqo) und (001) : (oqr). Diese beiden Winkel geben durch Konstruktion zuerst die Parameter $a_1 : a_2 : a_3$ der Fläche und dann das Symbol (pqr). Will man die Indizes aus irgend einem Grunde genauer berechnen, dann tritt die sphärisch-trigonometrische Berechnung an Stelle der Konstruktion, wie folgendes Beispiel der als unbekannt angenommenen Indizes des Hexakisoktaeders {321} dartut:

1. Gegeben die Winkel an der längsten und mittleren Kante, A und B. Man berechnet in Dreieck $(1\bar{1}0)$, (213), (010) (Seite 96) den Winkel bei (010); dieser ist gleich (100) : (203). Das rechtwinkelige Dreieck (001), (203), (213) liefert dann im Winkel bei (001) den Abstand (100) : (210).

2. Gegeben die Winkel an der längsten und kürzesten Kante, A und C. Man berechnet in Dreieck $(1\bar{1}0)$, $(\bar{1}01)$, (213) (Seite 96) den Winkel bei $(1\bar{1}0)$ und kennt damit (112) : $(\bar{1}\bar{1}2)$, ebenso mit Hilfe der Cosinusformel den Abstand (001) : $(\bar{1}\bar{1}2)$ [(112) selbst ist dabei unbekannt]. In dem rechtwinkeligen Dreieck (001), (213), (112) kennt man nun (112) : (213) $= \frac{A}{2}$ und

(001) : (112) = ($\bar{1}\bar{1}$2) : (112) — ($\bar{1}\bar{1}$2) : (001), dies gibt einen Winkel η bei (001). (100) : (210) ist dann $45 - \eta$. Im rechtwinkeligen Dreieck (001), (203), (213) kann man nun auch (001) : (203) berechnen; man erhält also zuerst $(q\,r\,o)$ und $(q\,o\,p)$.

Berechnung eines Ikositetraeders aus dem Winkel an der kürzeren Kante; Beispiel (211) : (121) = A. Man berechnet im rechtwinkeligen Dreieck (211), (332), (111) aus dem Winkel bei (111) = 60° und der Seite (211) : (332) $= \frac{A}{2}$ den Abstand (111) : (211) und hat dann auch (100) : (211). Die Hauptgleichung (unten) ergibt nun cos(100) : $(p\,q\,q)$, also p^2, wenn man $q^2 = 1$ setzt.

Triakisoktaeder aus der kurzen Kante z. B. (212) : (122) = A. Man berechnet im rechtwinkeligen Dreieck (212), (111), (334) aus der Seite (212) : (334) $= \frac{A}{2}$ und dem Winkel 60° bei (111) den Abstand (212) : (111) und kennt dann auch (212) : (010); man erhält also schließlich cos(010) : $(p\,q\,p)$.

Wir suchen also bei den behandelten Beispielen mit Hilfe einer kurzen sphärisch-trigonometrischen Rechnung die erforderlichen Winkel zu einem Hauptpol zu erhalten. Hat man einen solchen Winkel gefunden, dann liefert die unten folgende Hauptformel für diesen Winkel eine einfache Gleichung, welche in bezug auf die Quadrate der gesuchten Indizes vom ersten Grade ist.

Berechnung von Winkeln zwischen Flächen.

Die Hauptgleichung erhält jetzt die einfache Form:

$$\cos V = \frac{hp + kq + lr}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2} \cdot \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}},$$

was die einfachste Berechnung des Winkels zweier Flächen ergibt. So ergeben sich z. B. für die Kanten eines Hexakisoktaeders $\{hkl\}$.

$$\cos(hkl) : (hlk) = \frac{h^2 + 2kl}{h^2 + k^2 + l^2} \qquad \text{längste Kante}$$

$$\cos(hlk) : (h\bar{l}k) = \frac{h^2 + k^2 - l^2}{h^2 + k^2 + l^2} \qquad \text{mittlere Kante}$$

$$\cos(hkl) : (khl) = \frac{2hk + l^2}{h^2 + k^2 + l^2} \qquad \text{kürzeste Kante}$$

oder für die zweierlei Kanten eines Ikositetraeders $\{hkk\}$

$$\cos(hkk) : (h\bar{k}k) = \frac{h^2}{h^2 + 2k^2}$$

$$\cos(hkk) : (khk) = \frac{2hk + k^2}{h^2 + 2k^2}.$$

Trigonales System.

Stereographische Projektion. Diese erfolgt in üblicher Weise auf die Ebene senkrecht zur vertikal gestellten dreizähligen Hauptachse (Fig. 75). Zum Vergleich zeigt Fig. 76 die Projektion für eine eventuelle Anwendung der Bravaisschen Symbole (siehe hexagonales System).

Die Pole der vertikalen Prismenzone haben für alle Kristalle die gleiche Lage auf dem Grundkreis. Der Bogen zwischen abwechselnden Polen des Prismas 1. und 2. Stellung, $\{2\bar{1}\bar{1}\}$ und $\{10\bar{1}\}$ beträgt 30°, also $(2\bar{1}\bar{1}):(10\bar{1}) = (10\bar{1}):(11\bar{2})$ usw. = 30°. Die Rhomboeder 1. Art liegen alle auf Durchmesser-Großkreisen durch Prismenpole 1. Art, z. B. 100 auf $[2\bar{1}\bar{1}:111]$ usw. Die Rhomboeder 2. Art und die hexagonalen Pyramiden 2. Art liegen auf Durchmesser-Großkreisen durch Prismenpole 2. Art, z. B. $31\bar{1}$ auf $[10\bar{1}:111]$.

Fig. 75.

Um die richtige Verteilung des Vorzeichens der Indizes auf die wichtigsten Felder der stereographischen Projektion zu übersehen, ist der fortgesetzte Vergleich mit dem kubischen System zu empfehlen. Auf den Hauptzonen 1. Ranges liegen auch hier alle Flächensymbole, in welchen wenigstens ein Index 0 ist. Im Dreieck [001, 100, 010] liegen die Flächen, mit ausschließlich positivem Vorzeichen der Indizes, im Felde $(10\bar{1})$, (100), (010), $(01\bar{1})$ Flächen mit einem negativen Index an dritter Stelle, im Dreieck (100), $(10\bar{1})$, $(1\bar{1}0)$ Flächen mit zwei negativen Indizes, nämlich an zweiter und dritter Stelle usw.

Was die Eintragung von Flächenpolen auf Grund von Messungen betrifft, so erhält man die Pole auf den vornherein bestimmten Durchmessern aus

einer einzigen Messung, entweder aus ihrem Abstand vom Mitelpunkt (111) oder aus dem Winkel an der Polkante. Will man z. B. auf Grund des Winkels (100):(010) = A das **Grundrhomboeder** eintragen, so ziehe man die Durchmesser [$21\bar{1}:111$] und [$\bar{1}2\bar{1}:111$], welche 120° einschließen, und drehe nun über dem Netz soweit, bis diese beiden Durchmesser auf einem Großkreis den Bogenabstand A herausschneiden. Ähnlich würde man die beiden Flächen ($11\bar{1}$) und ($1\bar{1}1$) des negativen Rhomboeders {$11\bar{1}$} aus seinem Polkantenwinkel auf den beiden Durchmessern [$11\bar{2}:111$] und [$1\bar{2}1:111$] erhalten.

In allen diesen Fällen ergeben sich dann weiter die drei Hauptpole (100), (010), (001) in gleichen Abständen von (111) und damit sind die drei Hauptzonen 1. Ranges bestimmt.



Fig. 76.

Im Hauptdreieck (100), (010), (001) sind die drei Winkel gleich. Ein solcher Winkel ergibt das einzige zu bestimmende Element eines trigonalen Kristalles, den ebenen Winkel α zwischen zwei Polkanten des Grundrhomboeders; jeder Winkel im Dreieck ist nämlich $180 - \alpha$.

Bei der Eintragung weiterer Formen richtet man sich auch hier am besten nach den einfachsten Zonenbeziehungen. So erhält man nach Eintragung der bekannten Durchmesser und der Hauptzonen 1. Ranges direkt {110}, ebenso die Fläche ($11\bar{1}$) als Schnittpunkt zweier gegebener Zonen, daraus dann ($20\bar{1}$) usw. Flächen, welche durch ihre Neigung in bekannten Zonen bestimmt sind, trägt man auf Grund dieses einen Winkels ab. Sollte man für eine isolierte Fläche t nur ihre Neigung zu zwei bekannten Polen,

z. B. zu (100) und (010) kennen, dann ist eine vorherige gesonderte Dreiecksauflösung erforderlich. Die drei Pole bestimmen nämlich wieder ein Dreieck mit bekannten Seiten. In diesem Dreieck ermittele man vom Grundkreis ausgehend den Winkel an einem der beiden bekannten Pole, z B. an (100) und ziehe dann in der eigentlichen Projektion durch den fraglichen Pol den Großkreis, welcher den ermittelten Winkel mit der Zone [100 : 010] einschließt. Auf diesem Großkreis trage man dann den Abstand (100) : t ab.

Hat man in die stereographische Projektion eine Fläche aus ihren Indizes einzutragen, dann braucht man, wie in den übrigen Systemen, zwei Hauptzonen 2. Ranges, als deren Schnittpunkt dann der fragliche Flächenpol erscheint. Beispiele: 1. $(20\bar{1})$. Dieser Pol liegt zwischen (100) und $(10\bar{1})$. In Dreieck (100), (010), $(20\bar{1})$ ist der Winkel bei (010) ein Hauptwinkel η für die gegebene Fläche. Diesen erhält man aus einem ebenen Dreieck in einer Achsenebene; die eine Seite ist $\frac{a}{2}$, die andere a und der eingeschlossene Winkel $180 - \alpha$ (Fig. 77); der gesuchte Winkel ist η. Die Richtigkeit der Konstruktion ersieht man, wenn man sich den trigonalen Kristall entgegen der üblichen Aufstellung einmal nach der Art eines triklinen Kristalles aufgestellt denkt; AB ist die Achse der Zone $[010 : 20\bar{1}]$, OA jene der Zone [010 : 100]. Man ziehe nun den Großkreis durch (010), welcher den Winkel η mit dem Großkreis [010 : 100] einschließt. Das ergibt den Schnittpunkt $(20\bar{1})$.

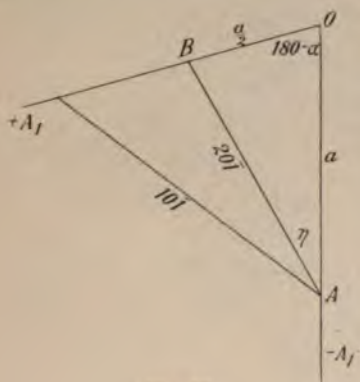


Fig. 77.

2. Die gegebene Form sei $(32\bar{1})$. Man konstruiere analog dem Verfahren in 1. zunächst den Großkreis $[010 : 30\bar{1}]$ und in ähnlicher Weise den Großkreis $[100 : 02\bar{1}]$, der Schnittpunkt beider ist der gesuchte Pol $(32\bar{1})$.

Bei der Eintragung einer Form aus ihren Indizes kann man auch zweckmäßig aus der Hauptformel (Seite 104) die Winkel zu zwei Polen auf dem Grundkreis berechnen; z. B. $(32\bar{1}) : (1\bar{1}0)$ und $(32\bar{1}) : (01\bar{1})$, was dann den Pol $(32\bar{1})$ als den Schnittpunkt zweier Kleinkreise um $(1\bar{1}0)$ und $(01\bar{1})$ mit den berechneten Winkelradien ergibt.

Im folgenden sei noch die Darstellung einzelner Formen in stereographischer Projektion, unabhängig von den Elementen des Kristalles, aus Winkelmessungen behandelt.

S k a l e n o e d e r. [Beispiel $\{20\bar{1}\}$.] Man zeichne zuerst den Grundkreis mit seinen wichtigsten Polen (Fig. 75) und die bekannten Durchmesser. 1. Aus dem Winkel der Mittelkante B und dem Winkel der vorderen Pol-

kante A_1. Man erhält $(01\bar{1}):(20\bar{1}) = 90 - \frac{A_1}{2}$ und $(10\bar{1}):(20\bar{1}) = \frac{B}{2}$. Man erhält also $(20\bar{1})$ als Schnittpunkt zweier Kleinkreise um $(01\bar{1})$ und $(10\bar{1})$ mit den Radien $90 - \frac{A_1}{2}$ und $\frac{B}{2}$.

2. Aus dem Winkel der Mittelkante B und dem Winkel der seitlichen Polkante A_2. Das Verfahren ist ähnlich, nachdem $(10\bar{1}):(20\bar{1}) = \frac{B}{2}$ und $(1\bar{1}0):(20\bar{1}) = 90 - \frac{A_2}{2}$.

3. Aus dem Winkel an beiden Polkanten A_1 und A_2. In diesem Falle ist $(01\bar{1}):(20\bar{1}) = 90 - \frac{A_1}{2}$ und $(1\bar{1}0):(20\bar{1}) = 90 - \frac{A_2}{2}$.

Trapezoeder. [Beispiel $\{20\bar{1}\}$.] Aus dem Polkantenwinkel A und einem Mittelkantenwinkel, etwa über $(1\bar{1}0)$, B. Man ziehe den Grundkreis ohne seine wichtigeren Pole und darin drei Durchmesser unter der Neigung von 120°. Dann drehe man über dem Netz, bis zwei Durchmesser auf einem Meridian des Netzes den Winkel A herausschneiden. Dies gibt auf den Durchmessern zwei Pole des Trapezoeders, z. B. $(20\bar{1})$ und $(0\bar{1}2)$. Nun drehe man die Figur wieder, bis ein Meridian durch $(20\bar{1})$ den Grundkreis im Abstand $\frac{B}{2}$ schneidet. Dies liefert jetzt auf dem Grundkreis $(1\bar{1}0)$. Nun ergeben sich alle weiteren wichtigen Pole auf dem Grundkreis und die Hauptdurchmesser.

Berechnung der Elemente.

Die einzige zu berechnende Größe ist α, der Winkel zwischen je zwei Kristallachsen, also zwischen zwei Kanten des Grundrhomboeders.

a) Die Berechnung erfolgt meist am einfachsten auf sphärisch-trigonometrischem Wege. Im rechtwinkeligen Dreieck (100), (110), (111) (Fig. 75) ist der Winkel bei (111) 60°, jener bei $(100) = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Man erhält also letzteren direkt, wenn gemessen ist (111):(100) oder (111):(110) oder $(100):(110) = \frac{(100):(010)}{2}$. Liegt für keine der drei Seiten eine Messung vor, dann kann man aus einer Beobachtung eine solche allmählich berechnen. Ist z. B. die Polkante von {110} gegeben = (101):(110), dann erhält man im gleichschenkeligen Dreieck (101), (110), (111) aus dem gemessenen Bogen (101):(110) und dem Winkel bei (111) = 120° die Seite (111):(110). Bei gegebenem Polkantenwinkel A von $\{11\bar{1}\}$ kennt man im rechtwinkeligen Dreieck (100), (111), $(11\bar{1})$ den Winkel bei (111) = 60° und $(100):(11\bar{1}) = \frac{A}{2}$. Liegt für das Skalenoeder $\{20\bar{1}\}$ die Messung des Polkantenwinkels $(20\bar{1}):(2\bar{1}0) = A$ vor, dann ergibt sich

zunächst das Symbol des Flächenpoles, in welchem die Zone $[11\bar{1}:201]$ den Grundkreis schneidet; dieses ist $(5\bar{1}\bar{4})$ (Seite 54). Man berechnet $(2\bar{1}\bar{1}):(5\bar{1}\bar{4})$ aus dem Doppelverhältnis (Gleichung 15a Seite 60). Dieser Abstand ist im rechtwinkeligen Dreieck (111), $(20\bar{1})$, y_1 [$= (4\bar{1}\bar{1})$] gleich dem Winkel bei (111); ferner ist darin $y_1:(20\bar{1}) = \frac{A}{2}$; also kann man $y_1:(111) = (4\bar{1}\bar{1}):(111)$ berechnen. Das Doppelverhältnis liefert in der Zone $[111:2\bar{1}\bar{1}]$ jetzt den Winkel (111):(100). Als weiteres Beispiel sei folgendes angeführt: gegeben die Polkante eines Trapezoeders $\{20\bar{1}\}$, etwa $(20\bar{1}):(0\bar{1}2) = A$. Im gleichschenkeligen Dreieck $(0\bar{1}2)$, (111), $(20\bar{1})$ kennt man den Winkel bei $(111) = 120^\circ$ und $(0\bar{1}2):(20\bar{1}) = A$; man kann also $(111):(20\bar{1})$ berechnen; ebenso kennt man wieder $(2\bar{1}\bar{1}):(5\bar{1}\bar{4})$ und damit in Dreieck y_1, (111), $(20\bar{1})$ die nötigen Stücke, um $y_1:(111)$ zu berechnen, womit die Zone [100 : 011] bestimmt ist.

b) Berechnung mit Hilfe der Grundgleichungen.

1. Hauptformel für den Winkel zwischen zwei Polen $\{hkl\}$ und $\{pqr\}$

$$\cos V = \frac{hp + kq + lr + L(kr + ql + hr + lp + hq + kp)}{\sqrt{h^2+k^2+l^2+2L(kl+hl+hk)} \cdot \sqrt{p^2+q^2+r^2+2L(qr+pr+pq)}}.$$

2. Formeln für die Rechnung innerhalb von Zonen Seite 60.

Die Hauptgleichung liefert insbesondere in zwei Fällen eine einfache Beziehung für L, nämlich:

a) Wenn V als der Polkantenwinkel einer Form (pqr) gegeben ist [Winkel zwischen Flächen mit gleichem Abstand von (111)].

b) Wenn V der Winkel ist zwischen einer beliebigen Fläche (hkl) und einer solchen (pqr) der vertikalen Prismenzone.

$L = \cos(100):(010)$; α erhält man daraus dann, wie oben.

Beispiele für ersteren Fall sind die Berechnung von α aus dem Polkantenwinkel $(20\bar{1}):(2\bar{1}0)$ des einfachsten Skalenoeders $\{20\bar{1}\}$ oder dem Winkel $(20\bar{1}):(0\bar{1}2)$ des Trapezoeders $\{20\bar{1}\}$, ein Beispiel für letzteren die Berechnung aus dem Mittelkantenwinkel A des Skalenoeders $\{20\bar{1}\}$; $\frac{A}{2} = (20\bar{1}):(10\bar{1})$.

Berechnung der Indizes.

Diese erfolgt am einfachsten graphisch mit Hilfe des Wulffschen Netzes. Man trage nach obigem Verfahren den Pol (pqr) in die stereographische Projektion ein. Er liegt z. B. im Teilstück $(10\bar{1})$, (100), (010), $(01\bar{1})$. Der dritte Index ist also negativ. Man ziehe die Großkreise $[010:pq\bar{r}]$ und $[100:pq\bar{r}]$. Dies liefert auf $[100:00\bar{1}]$ den Schnittpunkt $(po\bar{r})$ und auf $[010:00\bar{1}]$ den Schnittpunkt $(oq\bar{r})$. Nun mißt man in Dreieck (010), $(pq\bar{r})$,

(100) die Winkel bei (010) und (100) und hat nun, wie im triklinen System, in zwei Achsenebenen die Konstruktion ebener Dreiecke durchzuführen; die Achsenabschnitte bestimmen $(po\bar{r})$ und $(oq\bar{r})$, womit auch (pqr) ermittelt ist.

Bei der eigentlichen Berechnung unseres obigen (Seite 101) Beispieles t würde Dreieck (100), (010), t die Hauptwinkel η_1 und η_2 bei (100), bzw. (010) liefern. Aus zwei ebenen Dreiecken ergibt sich dann $(po\bar{r})$ und $(oq\bar{r})$.

In den meisten Fällen werden sich die Indizes schon aus den Zonenbeziehungen ergeben, sei es durch die Lage in zwei Zonen, sei es durch einen Winkel in einer Zone. Im letzteren Falle hat man für das Symbol (pqr) zwei Gleichungen, nämlich die Gleichung 15 Seite 60 und $pu + qv + rw = 0$, wobei $[uvw]$ das Zonensymbol ist.

Berechnung von Winkeln zwischen Flächen.

Im allgemeinsten Falle wende man die Hauptformel $\cos V$ für das trigonale System an.

Bei der Berechnung innerhalb von bekannten Zonen kommt Formel 15 Seite 60 in Betracht.

Anhang: Gegenseitige Transformation der Bravaisschen und Millerschen Symbole.

Zur Ableitung der Gleichungen für die Transformation eines Bravaisschen Flächensymboles $(ghkl)$ in ein Millersches (pqr) geht man von den Transformationsgleichungen 17 Seite 66 aus, indem man zuächst an Stelle eines vierstelligen Symboles $(g'h'k'l')$ bei der Ableitung der speziellen Gleichungen das dreistellige $(g'h'l')$ unter Weglassung von k' benutzt. Es wird so

$(10\bar{1}1) = (101)$ zu (100); also $[u_1v_1w_1] = [211]$
$(\bar{1}101) = (\bar{1}11)$ » (010); » $[u_2v_2w_2] = [\bar{1}11]$
$(0\bar{1}11) = (0\bar{1}1)$ » (001); » $[u_3v_3w_3] = [\bar{1}\bar{2}1]$
$(0001) = (001)$ » (111);
$(ghkl) = (ghl)$ » pqr.

Die speziellen Transformationsgleichungen werden also

$$p = g - k + l; \quad q = h - g + l; \quad r = k - h + l$$

und umgekehrt:

$$g = \frac{p-q}{3}; \quad h = \frac{q-r}{3}; \quad k = \frac{r-p}{3}; \quad l = \frac{p+q+r}{3}.$$

Hexagonales System.

Stereographische Projektion. Die stereographische Projektion hexagonaler Formen zeigt Fig. 78. Als Projektionsebene dient die Ebene, senkrecht zur vertikalen Prismenachse (Richtung der c-Achse). Die Pole in der vertikalen Prismenzone liegen dann auf dem Grundkreis, so insbesondere jene des Prismas 1. Art $\{10\bar{1}0\}$ und des Prismas 2. Art $\{11\bar{2}0\}$. Hier treten Abstände von 60°, bzw. 30° auf. Aber auch die übrigen Pole in der Zone, jene von dihexagonalen Prismen, etwa von $\{21\bar{3}0\}$ sind unabhängig von den Elementen des Kristalles in ihrer Lage bestimmt. Um eine solche Form in die Projektion einzutragen, berechne man z. B. den Abstand $(10\bar{1}0):(21\bar{3}0)$ mit Hilfe der Zonenformel 16b S. 61. Diesen Abstand erhält man auch aus einem ebenen Dreieck $O\overset{+}{A}_2\overset{+}{A}_1$ (horizontale Kristallachsen) mit den Seiten $O\overset{+}{A}_2 = \frac{a}{1}$, $O\overset{+}{A}_1 = \frac{a}{2}$ und dem eingeschlossenen Winkel von 120°. Der gesuchte Abstand ist gleich dem Winkel bei $\overset{+}{A}_2$.

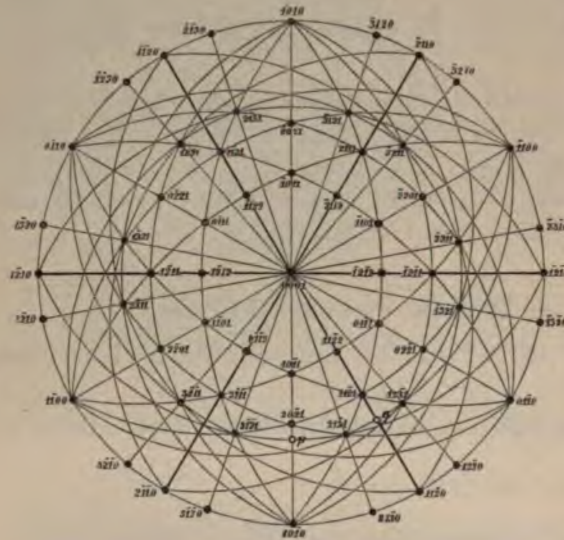


Fig. 78.

Hauptzonen 1. Ranges sind die Zonen $[0001:10\bar{1}0]$, $[0001:01\bar{1}0]$ usw.; auf ihnen liegen die Pole der Pyramiden 1. Art. Auf den Zonen $[0001:11\bar{2}0]$ liegen die Pole der Pyramiden 2. Art.

Zu einem beliebigen Durchmesser $[0001:hik o]$ existiert ein unter 60° geneigter Durchmesser $[0001:kh\bar{i}o]$, z. B. $[0001:21\bar{3}0]$ bildet 60° mit $[0001:3\bar{2}\bar{1}0]$.

Ein beliebiger Pol, z. B. $(21\bar{3}1)$ ist auch hier durch zwei Hauptzonen 2. Ranges bestimmt; die eine Zone ist in unserem Beispiel $[0001:21\bar{3}0]$. Hauptwinkel für die drei ersten Indizes ist der Winkel zwischen den beiden Zonen $[0001:10\bar{1}0]$ und $[0001:21\bar{3}0] = (10\bar{1}0):(21\bar{3}0)$. Er führt durch Konstruktion in der Ebene der drei horizontalen Achsen zum Verhältnis $+a'_1:+a'_2:-a'_3$, wie sich aus Fig. 78 und 51 ergibt. Die zweite Hauptzone ist für unsere Fläche die Zone $[1\bar{1}00:21\bar{3}1]$. Hauptwinkel für $-a_3:c$ ist im Dreieck (0001), $(1\bar{1}00)$, $(21\bar{3}1)$ der Winkel bei $(1\bar{1}00)$. Dieser ist gleich

dem Abstand $(0001):q$; er bestimmt in der Ebene der Achsen $-a_3$ und c ein ebenes Dreieck, aus welchem sich $c':-a'_3 = \mathrm{tg}(0001):q$ ergibt.

Für die Eintragung der Formen 1. und 2. Art genügt ein einziger Winkel. Für eine Pyramide 1. Art, etwa $\{10\bar{1}1\}$ erhält man den Pol $(10\bar{1}0)$ aus dem Abstand $(0001):(10\bar{1}1)$. Ist der Polkantenwinkel A gegeben, dann beschreibt man um $(1\bar{1}00)$ einen Kleinkreis mit dem Radius $90 - \frac{A}{2}$, was im Schnittpunkt mit $[0001:10\bar{1}0]$ den Pol $(10\bar{1}1)$ liefert. Das analoge Verfahren für eine Pyramide 2. Art ergibt sich aus der Fig. 78; z. B. für $\{11\bar{2}2\}$ sei der Polkantenwinkel B gemessen. Dies gibt einen Kleinkreis um $(\bar{1}2\bar{1}0)$ mit dem Radius $90^\circ - \frac{B}{2}$, welcher im Schnittpunkt mit $[0001:11\bar{2}0]$ die Fläche $(\bar{1}1\bar{2}2)$ liefert.

Die wichtigsten Formen 3. Art, in erster Linie die häufigeren dihexagonalen Pyramiden liegen in der Zone $[10\bar{1}0:01\bar{1}1]$; eine Winkelmessung in dieser Zone genügt also zur Eintragung der so bestimmten Flächenpole.

Für die Eintragung von Formen 3. Art aus Kantenwinkeln seien folgende Beispiele behandelt:

Dihexagonale Bipyramide. Zur Erläuterung wählen wir $\{21\bar{3}1\}$, indem wir die Indizes als bekannt annehmen.

a) Aus den beiden Polkantenwinkeln $(21\bar{3}1)$; $(3\bar{1}\bar{2}1) = A$ und $(21\bar{3}1):(12\bar{3}1) = B$. Den Pol $(21\bar{3}1)$ erhält man als Schnittpunkt zweier Kleinkreise, eines solchen um $(\bar{1}2\bar{1}0)$ mit dem Radius $90 - \frac{A}{2}$ und eines solchen um $(1\bar{1}00)$ mit dem Radius $90 - \frac{B}{2}$.

b) Aus einem Polkantenwinkel $(21\bar{3}1):(3\bar{1}\bar{2}1) = A$ und dem Basiskantenwinkel $(21\bar{3}1):(21\bar{3}\bar{1}) = C$. In diesem Falle trägt man die Pole auf dem Grundkreis nicht ein, nachdem ja eigentlich die Indizes der Form und damit des zur Konstruktion nötigen Poles $(21\bar{3}0)$ unbekannt sind. Man zieht vielmehr nur einen beliebigen Durchmesser und macht darauf $(0001):(21\bar{3}1) = 90 - \frac{C}{2}$. Dann dreht man über dem Netz die Zeichnung nach links, bis auf einem Meridian durch $(21\bar{3}1)$ der Abstand vom Schnittpunkt mit dem Grundkreis gleich $90 - \frac{A}{2}$ wird. Dies liefert auf dem Grund den Pol $(\bar{1}2\bar{1}0)$. Nun kann man von da die Projektion durch Eintragung der weiteren wichtigeren Pole des Grundkreises vervollständigen.

Hexagonales Trapezoeder. Wir nehmen hier wieder $\{21\bar{3}1\}$, als ob die Indizes bekannt wären. Gegeben sei die Polkante $(21\bar{3}1):(3\bar{2}\bar{1}1) = A$ und eine Mittelkante etwa $(21\bar{3}1):(3\bar{1}\bar{2}\bar{1}) = C$. Wie bei b) zeichnet man nur den Grundkreis ohne Pole und zieht zwei Durchmesser, unter 60° geneigt. Man dreht die Zeichnung, bis diese beiden Durchmesser auf einem Meridian den Abstand A herausschneiden. Die beiden Schnittpunkte sind $(21\bar{3}1)$ und $(3\bar{2}\bar{1}1)$. Nun dreht man die Zeichnung so lange, bis der Meridian

durch $(21\bar{3}1)$ den Grundkreis im Abstand $\frac{C}{2}$ schneidet. Der Schnittpunkt ist $(10\bar{1}0)$, worauf sich nun zunächst die Pole des Grundkreises vollständig eintragen lassen.

Berechnung der Elemente.

Das einzige zu berechnende Element ist $a:c = 1:x$ (z.B. $= 1:0{,}4989$ Beryll).

a) Trigonometrische Berechnung. Es ist $c:a = \operatorname{tg}(0001):(11\bar{2}2)$. Man hat durch Messung oder durch sphärisch-trigonometrische Rechnung aus einem bekannten Winkel den Winkel $(0001):(11\bar{2}2)$ zu finden. Die hierzu nötigen Grundlagen enthält die Entwickelung der stereographischen Projektion.

b) Berechnung mit Hilfe der Grundgleichungen.

Die Hauptformel für den Winkel zweier Pole $(pqrs)$ und $(p'q'r's')$:

$$\cos V = \frac{pp' + qq' + rr' + Ass'}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2 + As^2} \cdot \sqrt{p'^2 + q'^2 + r'^2 + As'^2}}; \quad A = \frac{3}{2c^2}.$$

Zonengleichungen (16) Seite 61.

Die Cosinusformel liefert eine einfache Gleichung im folgenden Falle: Gemessen der Winkel $(p'q'r's'):(pqro) = V$, d. h. ein Winkel zu einer Fläche der Prismenzone. Dann ist

$$\cos V = \frac{pp' + qq' + rr'}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \cdot \sqrt{p'^2 + q'^2 + r'^2 + As'^2}}.$$

Gemessen der Winkel zwischen zwei Polen $(pqrs)$ und $(p'q'r's)$ mit gleichem Abstand von (0001).

Es ist

$$\cos V = \frac{pp' + qq' + rr' + As^2}{p^2 + q^2 + r^2 + As^2}.$$

Diese letztere Gleichung findet also insbesondere Verwendung, wenn der Polkantenwinkel irgend einer Form gegeben ist.

Berechnung der Indizes.

Bei der graphischen Ermittelung der Indizes einer Form geht man von der im Feld $(10\bar{1}0)$, (0001), $(11\bar{2}0)$ gelegenen Fläche $(pqrs)$ aus. Hat man diese in die stereographische Projektion eingetragen, denn zieht man den Durchmesser $[0001:pqrs]$ und mißt den Winkel $(10\bar{1}0):(pqro)$. Er liefert durch Konstruktion in der Ebene der horizontalen Achsen oder nach der Gleichung $\operatorname{tg} 60 = (p - r) \cdot \operatorname{tg}(10\bar{1}0):(pqro)$ die Indizes p, q, r, wobei noch $q = 1$ gesetzt wurde und $p + q + r = 0$. Eine zweite Zone $(1\bar{1}00):(pqrl)$ schneidet die Zone $[0001:11\bar{2}0]$ im Abstand $(0001):q$. Dieser Abstand liefert $-a':c'$ und damit $\frac{r}{s}$ in ebener Konstruktion; außerdem ist $\operatorname{tg}(0001):q = -a':c'$.

Zur Berechnung der Indizes in bekannten Zonen können die Gleichungen (16) auf Seite 61 benutzt werden.

Berechnung von Winkeln.

Die eben genannten Gleichungen liefern das Mittel, um weitere Winkel in bekannten Zonen zu berechnen. Bei beliebigen Winkeln benutzt man die Hauptformel.

Anmerkung: Die Zonenrechnung bei vierstelligen Indizes $(ghkl)$ erfordert noch eine Erörterung. Man läßt bei der Berechnung einen der drei ersten Indizes, etwa k weg und rechnet mit dreistelligen Indizes, bezieht also die Rechnung auf drei Kristallachsen. Ein Beispiel erläutere das Verfahren: Gesucht die Indizes einer Fläche $(g_2 h_2 k_2 l_2)$ in den Zonen $(10\bar{1}0):(01\bar{1}1)$ und $(21\bar{3}0):(20\bar{2}1)$. Die dreistelligen Symbole sind (100), (011), (210) und (201). Also

$$\begin{array}{c|cc|c} 1 & 00 & 10 & 0 \\ 0 & 11 & 01 & 1 \\ \hline & \multicolumn{2}{c|}{0\bar{1}1} & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc|c} 2 & 10 & 21 & 0 \\ 2 & 01 & 20 & 1 \\ \hline & \multicolumn{2}{c|}{1\bar{2}\bar{2}} & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc|c} 0 & \bar{1}1 & 0\bar{1} & 1 \\ 1 & \bar{2}\bar{2} & 1\bar{2} & 2 \\ \hline & \multicolumn{2}{c|}{411} & \end{array}$$

also $(g_2 h_2 l_2) = (411)$ und $(g_2 h_2 k_2 l_2) = 41\bar{5}1)$.

$[0\bar{1}1]$ und $[1\bar{2}\bar{2}]$ sind Zonensymbole, bezogen auf insgesamt drei Kristallachsen. Wie man daraus das vierstellige Zonensymbol erhalten kann, darüber siehe C. Viola (Zeitschr. f. Krystallographie. **46.** 345).

B. Kristallzeichnung.

Bei der Kristallzeichnung will man ein räumliches Modell eines Kristalles, welches die Verteilung der Flächen und Kanten zu erkennen gestattet, durch ein entsprechendes Bild in der Ebene ersetzen. Dabei soll die Grunderscheinung, der Parallelismus von Kanten erhalten bleiben. Darum stellt man ein solches Bild nach den Prinzipien der Parallelprojektion dar und zwar projizieren wir im folgenden ausschließlich orthogonal, d. h. wir denken uns den Kristall in bestimmter Lage über der Zeichnungsebene und nehmen die Projektionsrichtung senkrecht zu ihr. Jedes solche Kristallbild setzt sich dann aus den orthogenal projizierten Kanten zusammen. Bei der Zeichnung des Kristallbildes auf Grund eines Achsenkreuzes werden wir auch einmal die schiefe Parallelprojektion benutzen.

Dem Kristall gibt man in üblicher Weise eine ganz bestimmte Lage gegenüber der (zunächst vertikal gedachten) Zeichnungsebene. Ausgehend von der gewöhnlichen Aufstellung der Kristalle — c-Achse immer vertikal und seitliches Pinakoid (010) symmetrisch auf den Beschauer zulaufend — stellt man eine (irrationale) Fläche p (Fig. 79) im vorderen oberen rechten Oktanten, welche folgenden Bedingungen genügt, parallel der Zeichnungsebene: Man denke sich die (irrationale) Zone, welche durch p und die Ebene O senkrecht zur vertikalen c-Achse bestimmt ist; die zugehörige Fläche p_1 in der Zone $[010:100]$ bildet dann 70° mit (010); die Neigung von p gegen p_1 beträgt 10°.

Dies entspricht also einer Drehung des Kristalles um die Vertikale nach links um 20° und einer darauffolgenden Neigung nach vorn um 10° um eine horizontale Richtung, wenn die Projektionsebene vertikal gedacht ist.

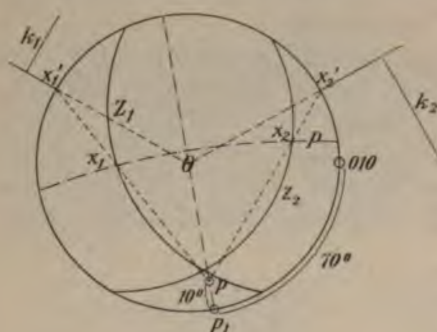


Fig. 79.

Von dieser üblichen Lage der Projektionsebene nehmen wir nur in besonderen Fällen Abstand, nämlich: häufig im hexagonalen und trigonalen System (und auch bei pseudohexagonalen und pseudotrigonalen Kristallen), weil hier bei dieser Wahl der Projektionsebene die Bilder oft keinen guten Anblick gewähren. Man nimmt dann eine größere Drehung und Neigung; ferner wenn überhaupt eine andere Ansicht des Kristalles wünschenswert und zweckmäßiger erscheint, z. B. oft bei Zwillingskristallen. Bei anderen Zeichnungsmethoden (Seite 116) wiederum bestimmt die möglichste Vereinfachung des Verfahrens etwas speziellere Werte.

Zur Zeichnung eines Kristallbildes hat man verschiedene Methoden[1]).

a) Ableitung eines orthogonal projizierten Kristallbildes aus der stereographischen Projektion.

Ausführung: Man zeichne mit Hilfe des Wulffschen Netzes eine gewöhnliche stereographische Projektion und trage in diese den Pol p (Fig. 79) der gewünschten Zeichnungsebene ein ($010:p_1 = 70°$ und $p_1:p = 10°$). Zu diesem Pol p suche man den polaren Kreis P (Hilfskreis). Dieser schneidet einen beliebigen Zonenkreis Z_1 in x_1; man ziehe die Gerade x_1p, welche den Grundkreis in x_1' schneidet. Die Senkrechte zum Durchmesser $x_1'O$ ist die Projektion k_1 der Zonenachse zu Z auf die Zeichnungsebene p. Genau auf die gleiche Weise verfährt man für jede beliebige andere Zone; die Verbindungsgerade der Schnittpunkte $x_2, x_3, x_4 \ldots$ mit p liefert die entsprechenden Punkte $x_2', x_3', x_4' \ldots$ auf dem Grundkreis und die Senkrechten zu $x_2'O, x_3'O, x_4'O \ldots$ sind die Projektionen der zugehörigen Kristallkanten.

Die Richtigkeit des Verfahrens ergibt sich aus folgendem: Die Projektion jeder Kristallkante auf die Zeichnungsebene erhält man nach der Transformation der ganzen stereographischen Projektion auf diese Ebene p. Die Transformation ist für die Zwecke der Kristallzeichnung jedoch nicht vollständig durchzuführen. Es genügt, wenn man für jede Zone $Z_1, Z_2, Z_3 \ldots$ ihre Schnittpunkte $x_1', x_2', x_3 \ldots$ mit dem Grundkreis nach der Transformation kennt. Dadurch ist der jeweilige Durchmesser $x_1'O, x_2'O \ldots$, auf welchem die Projektion der Kante senkrecht steht, bekannt (Seite 16).

1) Davon verdient Verfahren b) im allgemeinen den Vorzug.

Das eigentliche Verfahren sei an Fig. 80 erläutert. Wir gehen hier aus von der stereographischen Projektion einer rhombischen Kombination {110}, {111}, {001}, bezogen auf ein bestimmtes $a:b:c$.

Die jeweiligen Zonen Z_1, Z_2, Z_3 ... sind meist nicht auszuziehen. Man hat nur mit Hilfe des Wulffschen Netzes die Schnittpunkte x_1, x_2, x_3, x_4 ... auf dem Hilfskreis P einzutragen. Alle diese Eintragungen erfolgen, wie schon erwähnt, mit Hilfe des Netzes auf durchsichtigem Papier. Dieses wird mit einigen Klebstreifen mit dem eigentlichen Zeichnungsblatt fest verbunden. Die Übertragung der Kanten erfolgt durch Parallelverschiebung, wie auch bei den folgenden Methoden der Zeichnung. Bei der Verbindung der Kanten zum eigentlichen Kristallbild beginnt man am besten mit einem ausgezeichneten Eck, z. B. a in Fig. 80 *I*. Man macht $ab = [111:1\bar{1}1]$ beliebig lang und kommt so zu Eck b, durch welches man die zugehörigen Kanten $bc = [111:110]$, bd,

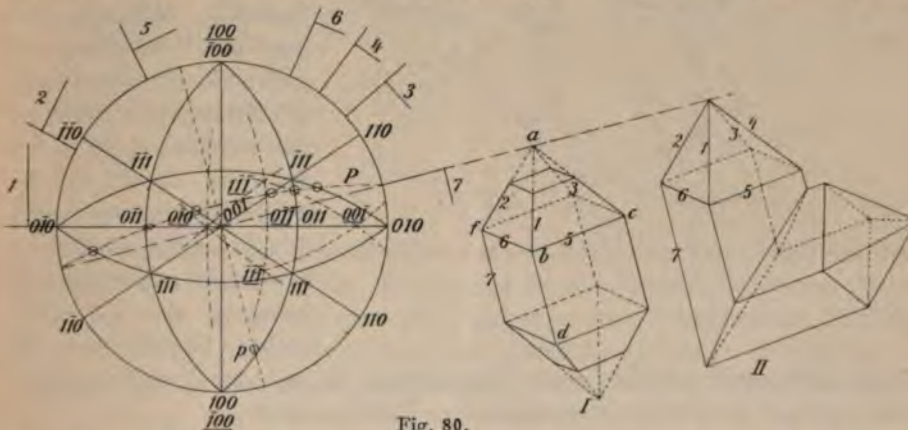


Fig. 80.

$bf = [1\bar{1}1:1\bar{1}0]$ zieht. Alles übrige in Fig. 80 *I* ergibt sich dann durch Parallelverschiebung. Nach Eintragung der herrschenden Formen werden kleinere Flächen angeschnitten, wie in Fig. 80 *I* die Basis.

Bei der Zeichnung von Zwillingskristallen verfährt man natürlich auf dieselbe Weise. In die stereographische Projektion des ersten Kristallindividuums zeichnet man zuerst die Pole des Zwillingskristalles ein, dann wie oben Pol p und den polaren Großkreis P und verfährt dann weiter, wie bei einem einfachen Kristall.

Fig. 80 (*I*) zeigt eine einfache rhombische Kombination {110}, {111}, {001}, dargestellt nach dieser Methode, Fig. 80 (*II*) denselben Kristall als Zwilling nach {011}. In der stereographischen Projektion sind die Zonen des Zwillings (Pol der Umdrehungsachse ist $(0\bar{1}1)$ nach Seite 16) mit gestrichelten Linien angedeutet. Ihre Schnittpunkte mit P und deren Transformation auf den Grundkreis sind nicht besonders hervorgehoben. Am eigentlichen Bild des ersten Teilkristalles schneidet man zunächst die Zwillingsebene an. Dann erfolgt die Eintragung der Prismenkanten des zweiten Individuums und schließlich die Übertragung der übrigen Kanten.

b) Ableitung eines orthogonal projizierten Kristallbildes aus der gnomonischen Projektion.

Ausführung: Man trage in die nach Seite 39ff. oder 71 erhaltene gnomonische Projektion auf die Ebene senkrecht zur vertikalen Achse die Gerade P (Leitlinie) ein für einen Drehungswinkel $\delta = 20^\circ$ und den Neigungswinkel $\varepsilon = 10^\circ$ (Fig. 81). Die Gerade $P(\measuredangle\, ODM = 10^\circ$ und $P \perp OM')$ ist die Polare zum Pol p der Zeichnungsebene für die orthogonale Projektion. Diese Gerade P[1]) schneidet jede Zonengerade, z. B. Z_1 in einem Punkte x_1. Man bestimme noch den Winkelpunkt W (Seite 34) zur Geraden P. Die Senkrechte zu Wx_1 ist die Projektion k_1 der Kante der Zone Z_1 auf die gewählte Zeichnungsebene. Die Projektion einer jeden Zonenachse oder Kristallkante ist also die senkrechte Gerade auf die Verbindungslinie zwischen dem Winkelpunkt W und dem Schnittpunkt x der Leitlinie P mit der entsprechenden Zonengeraden.

Fig. 81.

Beweis: Um die Projektion des Kristallbildes auf die Fläche p zu erhalten, wäre zunächst die ganze gnomonische Projektion auf die Zeichnungsebene p zu transformieren; die senkrechten Geraden auf den Zonenlinien in der neuen Lage wären dann die orthogonale Projektion der Kanten auf die Ebene p als Zeichnungsebene. Diese Transformation ist aber für Zwecke der Kristallzeichnung nicht ganz durchzuführen; es genügt die Richtung jeder Zone in der neuen Lage. Die Linie P wird bei Transformation die Linie der neuen Prismen; ihre Punkte fallen also ins Unendliche, M nach M' und ferner z. B. x_1 nach x_1'. Dabei ist der Winkelabstand $Mx_1 = \measuredangle\, M'Ox_1'$. Ox'_1 ist die Richtung der Zone Z_1 nach der Transformation. Der Winkelabstand Mx_1 wird aber direkt gemessen durch den Winkel MWx_1 beim Winkelpunkt W. Wx_1 ist also selbst die Richtung der Zone Z_1 nach der Transformation auf p.

Bei der Zeichnung von Zwillingskristallen sind außer den Polen und Zonen des einen Kristallteiles noch jene des zweiten in Zwillingsstellung einzuzeichnen (Seite 43).

1) Es ist auch einfach Strecke $OM = r \cdot \operatorname{tg} \varepsilon$ und $MW (= MD) = \frac{r}{\cos \varepsilon}$.

In Fig. 82 ist eine einfache monokline Kombination $b\{010\}$, $m\{110\}$, $c\{001\}$, $\varrho\{\bar{1}01\}$ nach diesem Verfahren gezeichnet. Kante $1 = [110:1\bar{1}0]$ ergibt sich als senkrecht zur Prismenlinie P, $2 = [100:001]$ senkrecht zu Wx_2, $3 = [010:001]$ senkrecht zu Wx_3, $4 = [010:\bar{1}01]$ senkrecht zu Wx_4 usw.

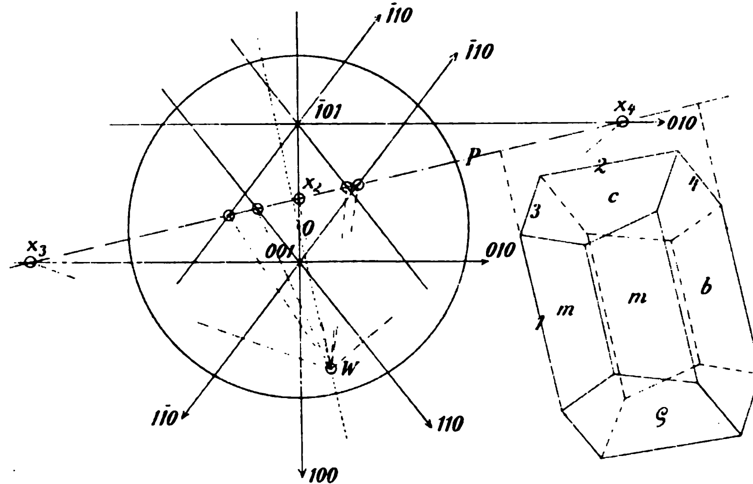


Fig. 82.

Die Ableitung des Kristallbildes aus der gnomonischen Projektion der Zonen ist also höchst einfach. Die häufige Anwendung des Verfahrens dürfte sich daraus von selbst ergeben. Nachteiliger ist seine Benutzung bei Flächen mit größerer Neigung. Dann gibt man jedenfalls der immer verwendbaren stereographischen Projektion den Vorzug. Auf Kosten der Genauigkeit kann man allerdings den Maßstab der gnomonischen Projektion kleiner nehmen.

Zweckmäßig legt man auch hier ein Hilfsnetz zugrunde, z. B. das gnomonische Netz nach Goldschmidt, in welches Leitlinie und Winkelpunkt für die übliche Neigung und Drehung bereits vorgezeichnet sind. Ferner sei auf die öfters vorkommende Hilfskonstruktion verwiesen, nach einem sehr fern liegenden Schnittpunkt zweier Geraden (Leitlinie und eine Zonengerade) eine dritte Gerade (durch den Winkelpunkt W) zu ziehen. Diese Aufgabe ist in folgender Weise zu lösen: a und b seien zwei Gerade (Leitlinie und Zone) mit sehr fernem Schnittpunkt (Fig. 82 a); nach diesem ist eine dritte Gerade durch D (z. B. Winkelpunkt W der Fig. 82) zu ziehen. Man ziehe durch D eine

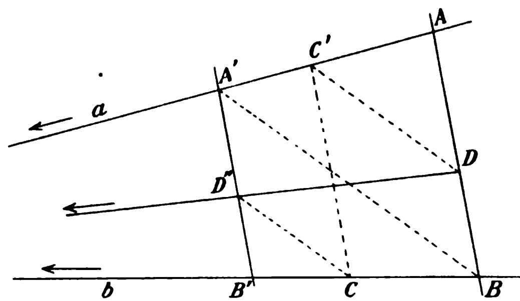


Fig. 82 a.

beliebige Gerade AB, ferner zur letzteren eine Parallele $A'B'$. Nun ziehe man $A'B$ und dazu die Parallele $C'D$; außerdem $CC' \parallel AB$ und schließlich $CD'' \parallel A'B$. Die Verbindungslinie DD'' gibt die Richtung der gesuchten Geraden an. Bei der Anwendung dieses Verfahrens sind die Hilfslinien außer $A'B'$ überflüssig.

Es muß sich verhalten $A'D'' : A'B' = AD : AB$. Nun ist $AD : AB = AC' : AA'$; ferner $AC' : A'A = BC : BB' = A'D'' : A'B'$. Also auch $A'D'' : A'B' = AD : AB$.

Anhang: **Kantenrichtige Kristallbilder.**

Eine möglichst getreue Wiedergabe der Größe der Kanten und Flächen an einem Kristalle wird bei der Darstellung im Kristallbild ebenfalls angestrebt. In manchen Fällen kann sogar eine genaue Darstellung der Größenverhältnisse erwünscht sein. Zu diesem Ziele kommt man auf einfachem Wege, wenn man von der stereographischen oder gnomonischen Projektion ausgeht.

Fig. 83 zeigt das Verfahren für die gnomonische Projektion an einem einfachen Beispiel. I ist die gnomonische Projektion einer rhombischen

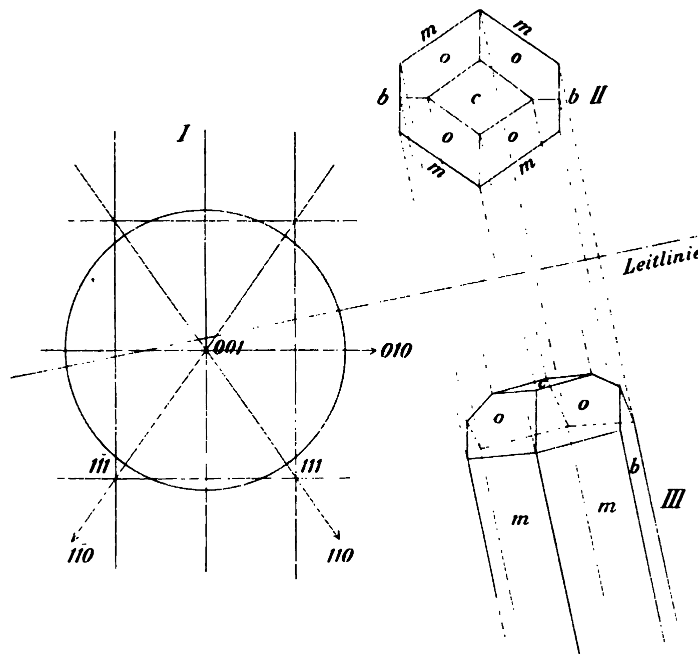


Fig. 83.

Kombination $m\{110\}$, $o\{111\}$, $b\{010\}$, $c\{001\}$. Man zeichnet daraus zunächst ein sog. Kopfbild (II), d. h. eine orthogonale Projektion des Kristalles auf die Ebene senkrecht zur vertikalen c-Achse des Kristalles (Ebene der gnomonischen Projektion). Im Umriß dieser Kopfprojektion stellt man die Breite der nur im Durchschnitt zur Darstellung kommenden Flächen

der Vertikalzone durch Abmessen möglichst naturgetreu dar. Die projizierten Längen geneigter Kanten berechnet man nötigenfalls.

Nun geht man zur Projektion auf die gewünschte Ebene über (*III*). Leitlinie und Winkelpunkt dazu liefern wieder die projizierten Kantenrichtungen. Die Senkrechten auf die Leitlinie von den Eckpunkten in *II* aus schneiden nun auf den projizierten Kanten die Längen im richtigen Verhältnis aus.

Keiner weiteren Erläuterung bedarf das Verfahren, wenn man von einer stereographischen Projektion ausgeht.

Die Begründung ist einfach; beim Übergang von Ebene *II* in *III* erscheint die Leitlinie als Drehungsachse; gleiche Punkte liegen vorher und nachher auf der gleichen Senkrechten zur Leitlinie.

c) Ableitung eines Kristallbildes aus der Projektion des Achsenkreuzes.

Ausführung: Jede Kristallfläche schneidet bei allgemeinster Lage die drei Achsenebenen in Geraden, z. B. die Fläche *abc* in den Geraden *ab*, *bc*, *ac* (Fig. 84). Eine zweite Fläche *ab'c'* liefert ebenfalls drei solche Schnittgerade. Die beiden Geraden *bc* und *b'c'* schneiden sich in einem Punkt *m*, welcher der Schnittgeraden der beiden Flächen angehört. Ein zweiter Punkt dieser Schnittgeraden ist in unserem Falle noch der Punkt *a*. Also ist die Gerade *am* die Projektion der Kante zwischen den beiden Flächen. Durch eine ähnliche Konstruktion erhält man aus der Parallelprojektion (Fig. 85a) des Achsenkreuzes *OABC* (rhom-

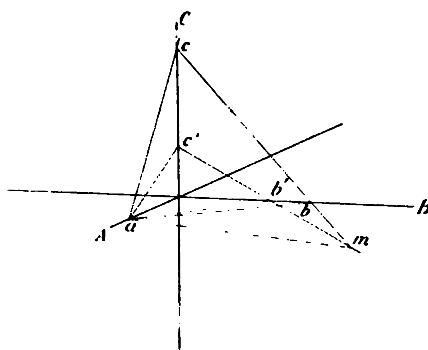


Fig. 84.

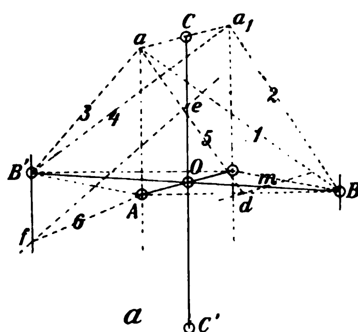


Fig. 85a.

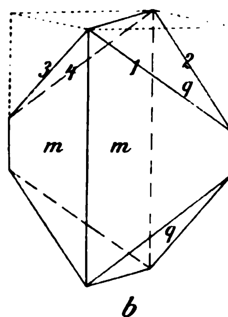


Fig. 85b.

bischer Kristall) die Projektion jeder beliebigen Kristallkante, z. B. Kante 1 zwischen (011) und (110) (Verbindung von *B* mit *a*, dem Schnittpunkt von aa_1 mit *aA*), Kante 2 zwischen (011) und ($\bar{1}10$). Bei Flächen, welche nicht

schon durch einen gemeinsamen Punkt auf einer Achse gehen, kann man dies durch Parallelverschiebung erreichen oder man konstruiert in der wahren Lage zwei Punkte, je einen in zwei Achsenebenen. Kanten parallel den Kristallachsen sind natürlich von vornherein bestimmt, ebenso Kanten, welche als Schnittgerade einer Fläche mit einer Achsenebene erscheinen.

Die Übertragung der konstruierten Kantenrichtungen in das eigentliche Kristallbild erfolgt wie bei den beiden ersten Methoden. Fig. 85b zeigt eine einfache rhombische Kombination $m\{110\}$, $q\{011\}$. Zuerst wurden die vertikalen Prismenkanten, parallel OC, im richtigen Abstandsverhältnis übertragen, dann die der a-Achse parallele horizontale Kante $aa_1 = (011):(0\bar{1}1)$ am Ende. Nun werden nacheinander die Kanten $(011):(110) = 1$, $(011):(\bar{1}10) = 2$, $(0\bar{1}1):(1\bar{1}0) = 3$ und $(0\bar{1}1):(\bar{1}\bar{1}0) = 4$ (Verbindung von B' mit a_1, dem Schnittpunkt von aa_1 mit $A'a_1$) konstruiert.

In der Fig. 85a ist noch die Konstruktion weiterer Kombinationskanten angedeutet: $(021):(110) = 5$; (110) schneidet die Ebene AOB in der Geraden AB, (021) in md; ferner schneidet (110) die Ebene AOC in Aa und (021) dieselbe Ebene in aa_1; die beiden Punkte a und d bestimmen also die Kombinationskante 5. Ferner: $(1\bar{2}2):(1\bar{1}0) = 6$; $(1\bar{2}2)$ schneidet die Ebene BOC in ef, $(1\bar{1}0)$ in fB'. Die Punkte A und f bestimmen die Richtung der Kante 6. Die vordere Polkante der Pyramide $\{111\}$ wäre AC, die seitliche BC usw.; die vordere Polkante von $\{112\}$ ist Ae, eine horizontale Kante ist AB usw.

Zeichnung des Achsenkreuzes.

Zur Projektion des Achsenkreuzes kann man verschiedene Methoden verwenden.

1. Spezielles Verfahren nach Naumann. Bei der Darstellung von Bildern in der üblichen Lage benutzt man häufig die schiefe Parallelprojektion. Man zeichnet hier gewöhnlich zuerst ein kubisches Achsenkreuz und leitet daraus in einfacher Weise das Achsenkreuz eines anderen Systemes ab.

a Fig. 86. b

Zur Projektion des kubischen Achsenkreuzes dreht man zunächst um die vertikale c-Achse, bis die orthogonale Projektion $OD(= 1)$ der nach vorn

verlaufenden Achse OA_1 gleich $\frac{1}{3}$ der Projektion $Ob (= 3)$ der gleich langen querverlaufenden Achse OB_1 wird. Die Anordnung in der horizontalen Ebene nach dieser Drehung zeigt Fig. 86 a. Die Drehung entspricht einem Winkel von 18° 26′, da tg 18° 26′ = $\frac{1}{3}$. Nach dieser Drehung erhebt man das Auge über die horizontale Ebene, so daß die Sehstrahlen senkrecht zu $b'b$ bleiben und die schiefe Projektion von $DA_1 = dA = \frac{1}{2}$ (Fig. 87 und 86 b) wird; dies entspricht einer Elevation $\varepsilon = 9° 28'$. Bei diesem Verfahren behält die c-Achse ihre wahre Länge, nämlich $OC = OA_1 = OB_1$.

Für die Zeichnung des **kubischen** Achsenkreuzes ergibt sich also folgendes Verfahren: Man ziehe (Fig. 87) durch O die Gerade $b'Ob = 6$ Teile. Durch die Punkte b', $d (Od = 1)$, d_1, b ziehe man die Senkrechten und mache $dA = \frac{1}{2}$, $dA_1 = 3$ und $bB_1 = 1$. Dann ist OA_1 gleich der wahren Länge der vertikalen Achse, welche man au der Senkrechten durch O nach oben und unten abtrage, $OC = OC'$; ferner ist OA die Projektion der nach vorn verlaufenden Achse OA. Um die Projektion OB der querverlaufenden Achse zu erhalten, ziehe man A_1B_1, was auf der Geraden $b'b$ den Punkt F liefert. Die Verbindungslinie AF — die Projektion der Geraden A_1F — schneidet bB_1 in Punkt B und damit ist das Achsenkreuz $OABC$ projiziert. OA', OB', OC' sind die negativen Abschnitte des Achsenkreuzes.

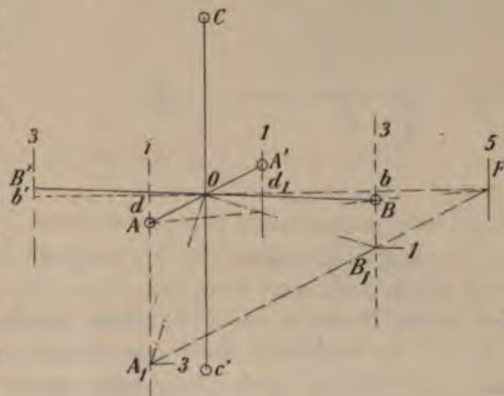


Fig. 87.

An der Hand der beiden Figuren ersieht man die Ableitung des kubischen Achsenkreuzes für jede gewünschte andere Drehung und Neigung. Man nimmt für bB_1 (Fig 86) und dann in der neuen Lage von OA_1B_1 D für dA (Fig. 87) andere Längen.

Aus dem kubischen Achsenkreuz leitet man auf einfachem Wege dasjenige der anderen Systeme ab:

Im **tetragonalen** System multipliziert man die Länge OC mit dem Werte der c-Achse; im **rhombischen** System wird die Länge OA mit dem Wert der a-Achse, die Länge OC mit jenem der c-Achse multipliziert. Im **hexagonalen** System multipliziert man OC mit dem Wert für die c-Achse, OA dagegen mit 1,732; dies führt zum Punkt A''

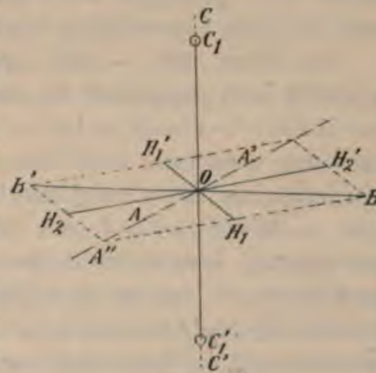


Fig. 88.

(Fig. 88); dann zieht man $A''B$ und $A''B'$ und halbiere $A''B$ in H_1 und $A''B'$ durch eine Parallele zu BB' in H_2. H_1H_1', H_2H_2' und BB' sind dann die Projektionen der drei gleichlangen horizontalen Kristallachsen.

Im monoklinen System ist die a-Achse nach vorn geneigt (Neigungswinkel β): Fig. 89b zeigt die Achsenebene ac. Man verfährt zunächst genau so wie im kubischen System. Dann macht man aber auf OA_1 (Fig. 89a) die Strecke $Og = Og'$ (in der Fig. 89b) und zieht durch g die Parallele zu A_1d;

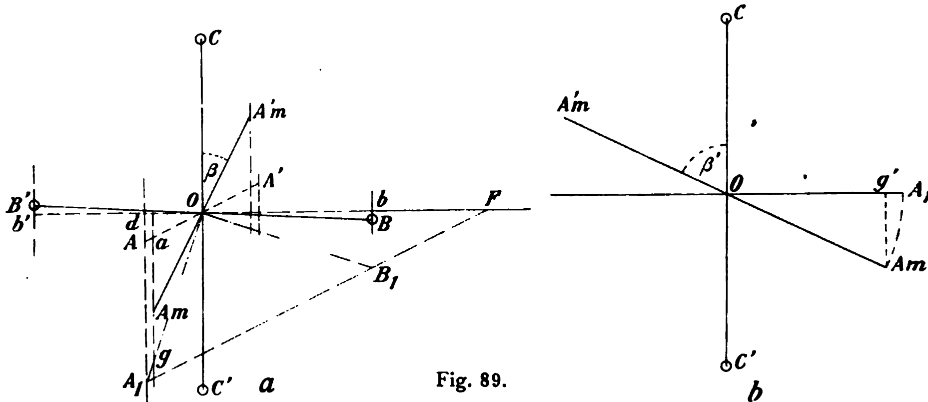


Fig. 89.

dies liefert Punkt a auf OA; dann macht man $aA_m = g'A_m$; dann ist OA_mBC die Projektion dreier gleichlanger Achsen des monoklinen Systems. Man hat jetzt nur noch OA_m mit dem Wert der a-Achse und OC mit jenem der c-Achse zu multiplizieren wie im rhombischen System.

Die Strecke Oa und aA_m kann man auch berechnen. Es ist $Oa = OA \cdot \sin\beta'$ und $aA_m = OC \cdot \cos\beta'$, wobei β' den spitzen Neigungswinkel bedeutet.

Im triklinen System behalten wir für die Fläche (010) ihre Lage wie bisher bei. Deswegen erhält man die c- und auch a-Achse ($= 1$), indem man die ganze Konstruktion wie im monoklinen System (Fig. 89) durchführt.

Die Ebene der b- und c-Achse dagegen, parallel der Fläche (100), erscheint jetzt gegenüber der bisherigen Lage gedreht; es ist der Winkel ac-Ebene : bc-Ebene $= 180 - (010):(100) = C$. Diesen Winkel berechnet man am einfachsten aus den drei Achsenwinkeln. Fig. 90a zeigt nun wie bisher die Anordnung der horizontalen Achsen $OB_1 = OA_1 = 1$ und jetzt noch $OB_1' = OA_1$ mit dem Winkel $A_1OB_1' = C$ (kleiner 90° angenommen). Man ziehe die Gerade A_1B_1', was Punkt F' liefert; dann findet man Punkt A, wie im monoklinen System, ziehe ferner AF', und $B_1'h$ parallel B_1b. Die Gerade Oh ist nun die Projektion einer horizontalen Geraden $= 1$ in der neuen Lage der bc-Ebene. In dieser Ebene besteht aber (Fig. 90b) noch die Neigung $b:c = \measuredangle B_tOC = \alpha$. Man mache also auf OB_1' in Fig. 90a $Ol = Ol'$ (Fig. 90b), ziehe die Gerade ll' (l' liegt auf Oh) parallel zu B_1b; ferner trage man die Länge $l'B_t$ ab; dann ist OB_t die Projektion von $OB = 1$ in ihrer wahren Lage.

Die wie im monoklinen System erhaltenen Projektionen OA_m und OC der a- und c-Achse hat man nun noch mit den zugehörigen Werten des Achsenverhältnisses zu multiplizieren.

Fig. 90.

Anmerkung. Den Winkel C kann man auch konstruieren, wie Fig. 91 andeutet. In Fig. 91 gehören die Punkte $Og'l'$ der horizontalen Ebene (senkrecht zur c-Achse) an. $OA_m = OB_t = 1$ sind nach dem Umklappen in die horizontale Ebene gleiche Abstände auf der a- und b-Achse, $A_m B_t$ ist die Entfernung der beiden Endpunkte der gleichlangen Strecken in der ab-Ebene.

Fig. 91.

OB_t erhält man aus dem kubischen Achsenkreuz (für drei gleichlange Achsen) auch auf folgende Weise: Man trage von O aus auf OA die Strecke $OA \cdot \cos C$ und auf OB die Strecke $OB \cdot \sin C$ ab und zieht durch die beiden erhaltenen Punkte Parallele zu OB, bzw. OA (Fig. 89a); dies gibt Punkt h (Fig. 90). Dann mache $Ol' = Oh \cdot \sin\alpha$, ziehe durch l' die Parallele zu $B_t b$ und mache $l'B_t = OC \cdot \cos\alpha$.

2. Beliebige orthogonale Projektion eines Achsenkreuzes (nach A. Jolles). Bei der orthogonalen Projektion eines Achsenkreuzes beginnen wir mit dem allgemeinsten Fall, dem triklinen System. Das Verfahren erlaubt am raschesten zu übersehen, in welcher Stellung die Projektion für das Kristallbild am günstigsten erscheint. Die parallelen Sehstrahlen sind senkrecht zur Zeichnungsebene und die gewünschte Lage des Achsenkreuzes gegenüber dieser Ebene erhält man im allgemeinsten Falle, ausgehend von der bc-Ebene parallel der Zeichnungsebene, durch eine vertikale Drehung (δ) und eine darauffolgende horizontale Neigung (ε); man erreicht das gewünschte Ziel, je nach der gegenseitigen Neigung der Kristallachsen, nach einer der vier folgenden Methoden:

1. Einfache Projektion auf die bc-Ebene (100) (Fig. 92). Man zeichnet die b- und c-Achse, OC und OB, unter dem Neigungswinkel α, direkt, entsprechend ihrem Längenverhältnis ein. In die Zeichnungsebene denkt man sich noch die ac-Ebene und ab-Ebene umgeklappt, was die gleichen Geraden $OA_b = OA_a = a$ ($\sphericalangle A_b O B = \gamma$ und $\sphericalangle A_a O C = \beta$) liefert. Aus der Fig. 92 $A_a c \perp OC$ und $A_b b \perp OB$) ersieht man, wie sich die Projektion der a-Achse $= OA$ ergibt. Findet wegen der Einfachheit zweckmäßige Anwendung im triklinen System, wenn β und γ stark von $90°$ verschieden sind.

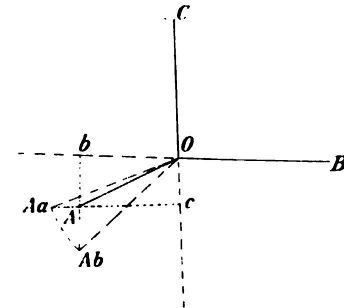


Fig. 92.

2. Einfache Drehung δ um die vertikale c-Achse (Fig. 93). Man projiziert zuerst, wie bei 1., das Achsenkreuz (OCA_1B_1) orthogonal auf die bc-Ebene (I) und zeichnet daraus (Hilfslinien durch B_1, A_a und A_1 angedeutet) die Projektion auf die horizontale Ebene — Grundriß (II — $C_h A_h B_h$). Dann dreht man um die Vertikale um den Winkel δ und erhält im Grundriß $C_h A_h' B'_h$ und daraus (Hilfslinien durch B_h' und A_h') die Projektion $OABC$ des Achsenkreuzes in der gewünschten Lage (I).

Anwendung im triklinen und monoklinen System bei größerem Winkel β.

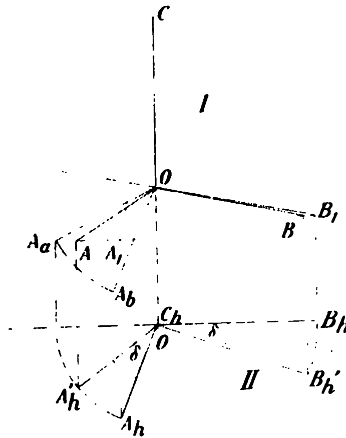


Fig. 93.

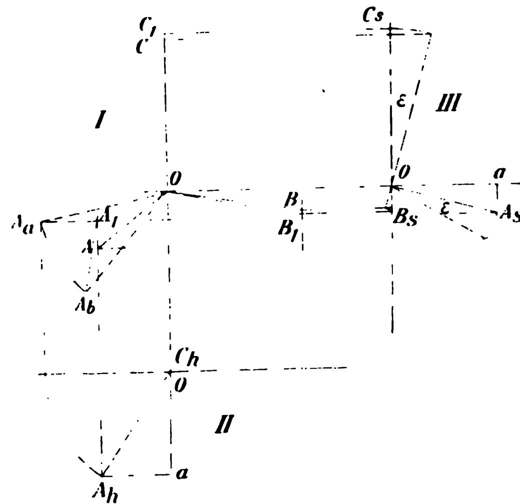


Fig. 94.

3. Einfache Neigung ε um die Horizontale durch O in der bc-Ebene (100). (Fig. 94.) Man projiziert zuerst, wie bei 1., das Achsenkreuz $OC_1A_1B_1$ (I), auf die bc-Ebene (100) und ermittelt dazu (Hilfslinien durch C_1, B_1, A_1; II liefert Oa) den Seitenriß $OC_sA_sB_s$ (III); in diesem führe man die Neigung ε durch. Nach Übertragung in die eigentliche Zeichnung erhält man nun die Projektion $OABC$ des Achsenkreuzes.

Anwendung im triklinen System, wenn β wenig, γ dagegen stärker von 90° verschieden ist.

1. Drehung δ um die vertikale c-Achse und darauffolgende Neigung ε (um eine Gerade senkrecht dazu in der Zeichnungsebene). Man projiziere zuerst (Fig. 95) das Achsenkreuz nach (1.) auf die Ebene (100) — $OA_1B_1C_1$ (I) und vollführe dann mit Hilfe des Grundrisses (II nach 2.) die Drehung δ, was OCB_2A_2 liefert. Nach dieser Umdrehung vollführe man am Seitenriß (III) die Neigung ε; dies liefert dann die endgültige Projektion $OABC$ des gegebenen Achsenkreuzes.

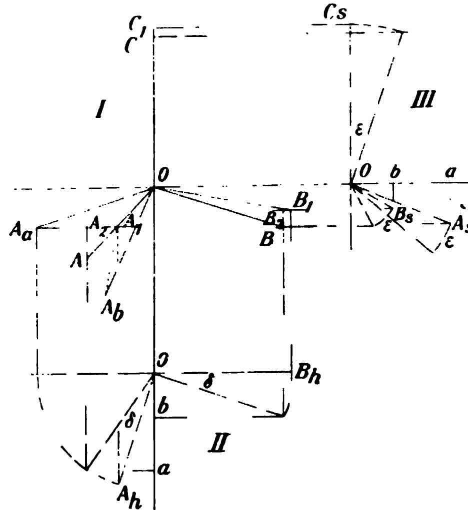


Fig. 95.

Anwendung, wenn α, β, γ wenig von 90° verschieden sind, also insbesondere auch im kubischen, rhombischen und tetragonalen System.

3. Projektion des Achsenkreuzes vom Achsenmittelpunkt aus (Axonometrie). Fig. 96 zeigt in räumlicher Anschauung drei Achsenrichtungen O_1X, O_1Y, O_1Z mit dem Neigungswinkel $ZO_1Y = \alpha$, $ZO_1X = \beta$ und $XO_1Y = \gamma$. Eine Grundfläche bestimmt darauf die Parameter O_1a, O_1b, O_1c, eine weitere Ebene $A_1B_1C_1$ die Achsenabschnitte O_1A_1, O_1B_1, O_1C_1. Zieht man von O_1 die Senkrechte O_1O auf diese letztere Ebene, dann ist $OA_1B_1C_1$ die orthogonale Projektion der drei Achsen auf die Ebene $A_1B_1C_1$.

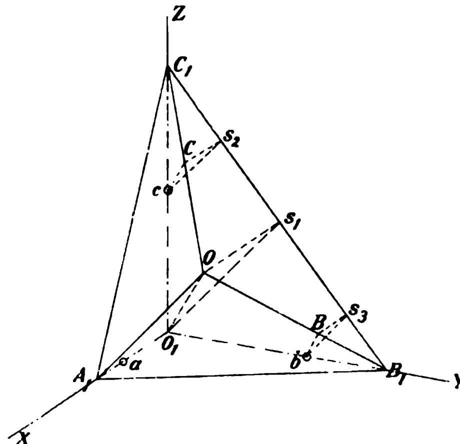


Fig. 96.

Ferner ist O_1s_1 in der Ebene $C_1O_1B_1$ senkrecht zu C_1B_1, also Os_1 senkrecht zu C_1B_1.

Die drei Seiten des Dreieckes $A_1B_1C_1$ erhält man aus den Achsenabschnitten dieser Ebene und den Winkeln α, β, γ, z. B. die Seite B_1C_1 aus O_1B_1, O_1C_1 und α. Man stelle nun zur Zeichnung des Achsenkreuzes aus den Seiten dieses Dreieck in der Zeichnungsebene dar (Fig. 97) und konstruiere über der Seite C_1B_1 das Dreieck $C_1O_1B_1$ usw., d. h. man klappe die drei Achsenebenen, welche in dem körperlichen Eck O_1 zu-

sammenstoßen, um die Gerade $C_1 B_1$ bzw. $B_1 A_1$ und $A_1 C_1$ in die Zeichnungsebene um. Von den drei Punkten O_1 aus errichte man die Senkrechten auf $C_1 B_1$, $B_1 A_1$ und $A_1 C_1$; diese schneiden sich in einem Punkt O. Zieht man noch OA_1, OB_1, OC_1, dann sind dies die projizierten Parameter der Projektionsebene $A_1 B_1 C_1$.

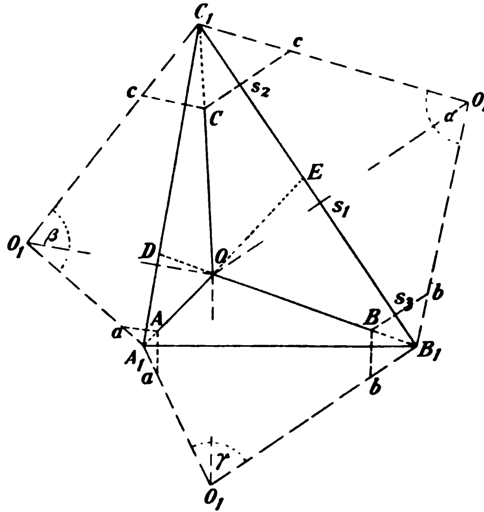


Fig. 97.

Die Längen der Grundparameter, z. B. $O_1 c$ erhält man in ihrer Projektion OC, indem man die Senkrechten cC auf die Ebene $A_1 B_1 C_1$ (Fig. 96) zieht. Ferner ist cs_2 senkrecht zur Umklappungsachse $B_1 C_1$. Die Erscheinung nach der Umklappung zeigt Fig. 97. Um also die Projektion der Grundparameter zu erhalten, machen wir in unserer Fig. 97 $O_1 c$ gleich der c-Achse, $O_1 b$ gleich der b-Achse, $O_1 a$ gleich der a-Achse und ziehen $cC \perp B_1 C_1$, $bB \perp A_1 B_1$ und $aA \perp A_1 C_1$ und erhalten die Projektion $OABC$ des wahren Achsenkreuzes auf die gewünschte Zeichnungsebene $A_1 B_1 C_1$.

In den Systemen mit rechtwinkeligem Achsenkreuz vereinfacht sich die ganze Konstruktion noch um ein Bedeutendes.

Um die Bilder in der üblichen Projektion zu erhalten, nimmt man dieselbe Zeichnungsebene, deren Lage bei der stereographischen Projektion angegeben wurde (Seite 109). Man berechnet für diese Ebene die Parameter und legt diese dann der weiteren Konstruktion zugrunde. Jede beliebige Projektion erhält man durch Auswahl einer Zeichnungsebene mit anderen Parametern, welche man nach der geeignetsten Drehung und Neigung des Kristalles einrichtet.

Anhang. Die bei dieser Projektionsmethode gewonnenen Erfahrungen können wir zur Lösung der beiden folgenden Aufgaben benutzen:

1. Zu einer durch ihre Projektionen gegebene Richtung durch den Achsenmittelpunkt O, welche durch ihre Neigung λ, μ, ν gegen die drei Kristallachsen OA_1, OB_1, OC_1 (Fig. 96) bestimmt ist, eine senkrechte Ebene zu legen und in ihren Schnittkanten mit den drei Achsenebenen darzustellen.

Um die Neigung der gesuchten Ebene zu erhalten, nehme man $O_1 O$ beliebig lang an und konstruiert damit und mit je einem der Winkel λ, μ, ν die rechtwinkeligen Dreiecke $O_1 O A_1$, $O_1 O B_1$, $O_1 O C_1$. Die drei Seiten $O_1 A_1$, $O_1 B_1$ und $O_1 C_1$ liefern direkt das Achsenverhältnis $O_1 A_1 : O_1 B_1 : O_1 C_1$, unter welchem die gesuchte Ebene die Achsen schneidet. Man braucht

nur Stücke von O_1 aus in diesem Verhältnis auf den drei Achsen abzutragen; dann ist die Neigung der gesuchten Ebene bestimmt, ebenso die Richtung ihrer Schnittkanten mit den drei Achsenebenen.

2. Auf eine durch ihre Projektion gegebene Ebene $A_1'B_1'C_1'$ (Fig. 98) die Senkrechte von O zu errichten und den Schnittpunkt dieser Senkrechten mit der gegebenen Ebene, O' zu ermitteln (Abstand OO' der gegebenen Ebene von Achsenmittelpunkt O).

Man ermittele aus den Elementen des Kristalles und den Parametern der gegebenen Fläche die wahre Größe des Dreieckes, welches die Schnittkanten der gegebenen Fläche mit den drei Achsenebenen bestimmen — $A_1B_1C_1$ (Fig. 97). Je zwei der Achsenebenen klappe man nun noch in die Ebene des Dreiecks $A_1B_1C_1$ um, z. B. $C_1O_1B_1$ und $C_1O_1A_1$. Von den Punkten O_1 aus ziehe man die Senkrechten zu den beiden Seiten B_1C_1 und A_1C_1; ihr Schnittpunkt O ist der Fußpunkt der Senkrechten von O_1 aus auf die Ebene. Man ziehe OB_1 und OA_1 und erhält Punkt D auf A_1C_1 und Punkt E auf B_1C_1. Diese beiden Kanten werden in der eigentlichen Projektion (Fig. 98) durch die Geraden durch O im gleichen Verhältnis geteilt.

Um also O' (Fig. 98) zu erhalten, teile man $A_1'C_1'$ im Verhältnis $A_1D:DC_1$ und $B_1'C_1'$ im Verhältnis $B_1E:EC_1$. Dies geschieht einfach, indem man auf je einer beliebigen Geraden durch A_1', bzw. B_1' die entsprechenden Stücke A_1D, DC_1, bzw. B_1E, EC_1 abträgt und weiter verfährt, wie Fig. 98 angibt. Der Schnittpunkt der beiden Geraden $D'B_1'$ und $E'A_1'$ ist der gesuchte Fußpunkt O' und OO' der Abstand der Ebene $A_1'B_1'C'$ vom Achsenmittelpunkt O.

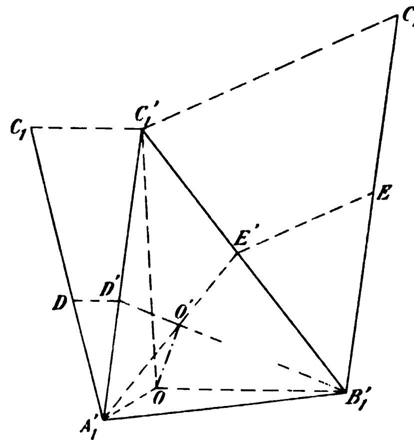


Fig. 98.

Einfacher ist das Verfahren:

a) in Systemen mit rechtwinkeligen Achsen. Man stellt in zwei Achsenebenen die wahren Dimensionen dar, welche der fraglichen Ebene entsprechen (Fig. 99). Von O aus ziehe man die Senkrechte OD und OE und teile nun die entsprechenden Geraden $A_1'C_1'$ und $B_1'C_1'$ in der Kristallprojektion im Verhältnis $A_1D:DC_1$, bzw. $B_1E:EC_1$. Die Geraden $D'B_1'$ und $E'A_1'$ schneiden sich wieder im gesuchten Punkte O'.

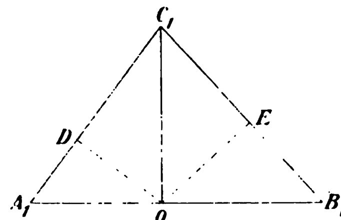


Fig. 99.

b) Wenn die gegebene Ebene zwei Kristallachsen parallel ist (triklin und bestimmte Fälle des monoklinen Systems). Beispiel: Auf (010) im triklinen System von O aus die Normale zu errichten. Man klappe in diese

Ebene aBc (Fig. 100) die Achsenebene BOC und BOA um, wie Fig. 101 zeigt. Dort ziehe man $OO' \perp a'B'$ und $OO' \perp c'b'$. O' ist dann die Spur der Normalen von O, dem Achsenmittelpunkt, auf die Ebene $(aBc) = (010)$. Ferner ziehe man $O'D \parallel a'B'$ und verlängere cO' bis E.

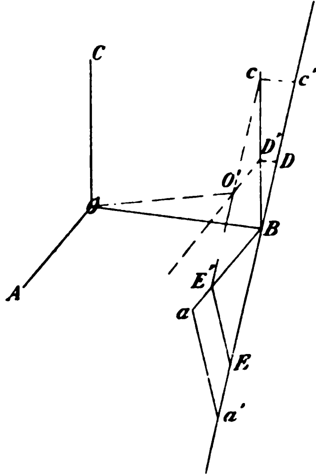


Fig. 100.

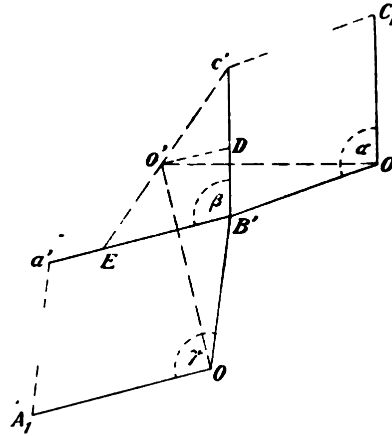


Fig. 101.

In der eigentlichen Projektion (Fig. 100) teilt man also aB im Verhältnis $a'E : EB'$ und cB im Verhältnis $c'D : DB'$, verbinde c mit E' und ziehe die Parallele zu aB durch D'; der Schnittpunkt O' ist dann der Fußpunkt der Normalen auf (010).

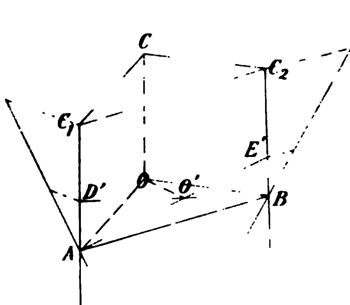


Fig. 102.

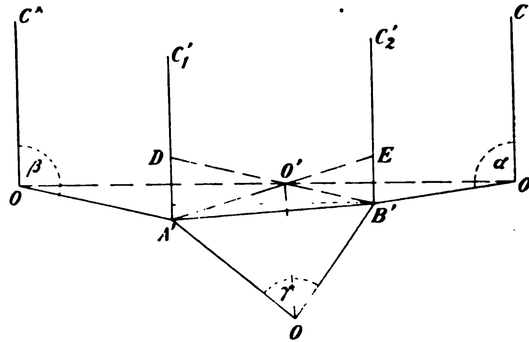


Fig. 103.

c) Ist die gegebene Ebene einer Kristallachse parallel, so gestaltet sich die Konstruktion ganz einfach, sobald die Ebene der beiden anderen Achsen zu unserer Fläche senkrecht (z. B. im rhomb. System) steht. Man stellt in dieser Ebene die wahren Dimensionen dar, fällt auf die Durchschnittskante die Senkrechte von O und teilt dann die Projektion dieser Durchschnittskante im Verhältnis der durch den Fußpunkt bestimmten Abschnitte. Im triklinen

System und bei den Flächen parallel der a- und c-Achse des monoklinen Systemes nimmt man zuerst die Umklappung in die angenommene Ebene vor. In Fig. 102 sei bezogen auf das trikline Achsenkreuz $OABC$ die Fläche (110) dargestellt, auf welche von O aus die Senkrechte zu fällen ist. Die Umklappung[1]) in diese Fläche ABC_2C_1 zeigt Fig. 103. Man ziehe $O'A'$ und $O'B'$ und erhält so die beiden Punkte D und E. In der eigentlichen Projektion hat man die beiden Strecken AC_1 und BC_2 im Verhältnis $A'D:DC_1'$, bzw. $B'E:EC_2'$ zu teilen. Man verbinde die beiden auf der Projektion so erhaltenen Punkte D' und E' mit A und B und erhält als Schnittpunkt O', den Fußpunkt der Normalen OO' auf die Fläche (110).

Die Konstruktion von Normalen zu bestimmten Kristallflächen ist häufig nötig bei der Konstruktion des Achsenkreuzes von Zwillingskristallen.

Das Achsenkreuz bei Zwillingskristallen.

Eine Kristallachse OA, die Normale OP zur Zwillingsebene und dieselbe Kristallachse OA' in Zwillingsstellung liegen in einer Ebene und zwar ist, wenn Z_1Z_2 die Spur der Zwillingsebene ist, $PZ_1 = PZ_2$, also auch $OA = OA'$, nachdem man zu Z_1Z_2 die Parallele AA' gezogen hat. (Fig. 104).

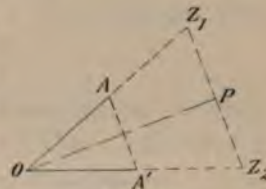


Fig. 104.

Um Zwillingskristalle aus einem Achsenkreuz abzuleiten, zeichne man zuerst das Achsenkreuz des einen Individuums in Normalstellung. Um daraus das Achsenkreuz des zweiten Teilkristalles zu erhalten, unterscheiden wir je nach der Art des Zwillingsgesetzes drei Fälle:

1. Zwillingsebene und Zwillingsachse sind rational. Die Richtung der Zwillingsachse erhält man sofort aus dem gewöhnlichen Achsenkreuz als Schnittgerade zweier Flächen aus ihrer Zone. Ferner zeichne man die Zwillingsebene ein. Die Zonenachse und je eine Kristallachse bestimmen ebenfalls Ebenen, deren Symbol man aus eben diesen beiden Kanten erhält. Man suche für eine dieser Ebenen die Durchschnittsgerade mit der Zwillingsebene. Diese Gerade schneidet die Zwillingsachse im Fußpunkt P.

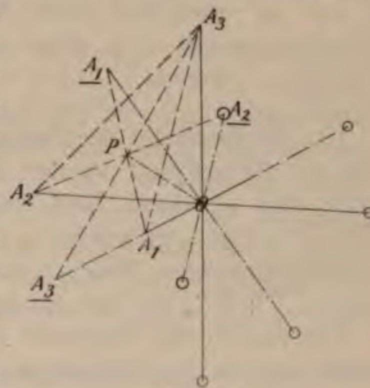


Fig. 105.

Als Beispiel diene Zwillingsbildung im kubischen System (Fig. 105) nach der Fläche (1$\bar{1}$1). Das ursprüngliche Achsenkreuz ist $OA_1A_2A_3$. Man zeichne die Fläche (1$\bar{1}$1) ein, ferner erhält man

[1]) Man zeichne zuerst $C'OA'C_1'$, dann gesondert $C'OB'C_2'$ und subtrahiere EB' von DA'. Dann ermittele man aus $\triangle AOB$ die Länge AB und erhält dann B', worauf man noch $C_2B'OC'$ usw. eintrage.

die Richtung OP der Zwillingsachse als Durchschnittsgerade der beiden Flächen (110) und (011) (Kante 1 in Fig. 85a). Den Endpunkt P (Fußpunkt) erhält man als Schnittpunkt auf der Geraden A_2P, welche als Durchschnitt der Fläche (1$\bar{1}$1) und der Fläche POA_3 (= 110) erscheint. OP ist also die projizierte Länge der Normalen auf die Zwillingsebene von O aus. Nach dem oben angegebenen Satz erhält man nun das Achenkreuz in Zwillingsstellung $O\underline{A}_1\,\underline{A}_2\,\underline{A}_3$, indem man $A_3P = \underline{A}_3P$, dann $A_1P = \underline{A}_1P$ und $A_2P = \underline{A}_2P$ macht.

2. Zwillingsebene rational, Zwillingsachse irrational. Man zeichnet in das gewöhnliche Achenkreuz zunächst die Zwillingsebene ein und sucht zu ihr nach Seite 123 die Normale von Achsenschnittpunkt O aus, d. h. die Zwillingsachse. Ihr Fußpunkt auf der Zwillingsebene sei P. Fig. 106 gilt für einen rhombischen Zwilling nach (111); $a : b : c = 0,9 : 1 : 0,6$. Man macht $\underline{A}P = AP$, $\underline{B}P = BP$ und $\underline{C}P = CP$, dann ist das Achsenkreuz $O\underline{A}\underline{B}\underline{C}$ in Zwillingsstellung projiziert.

3. Zwillingsachse rational, Zwillingsebene irrational.

Die Richtung der Zwillingsachse OP (Fig. 106) erhält man als Durchschnittsgerade zweier rationaler Flächen, welche der Zone der Zwillingsachse angehören.

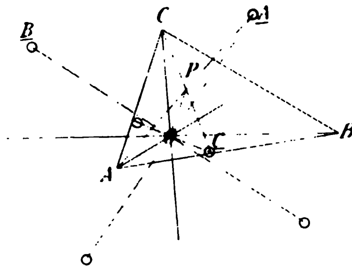


Fig. 106.

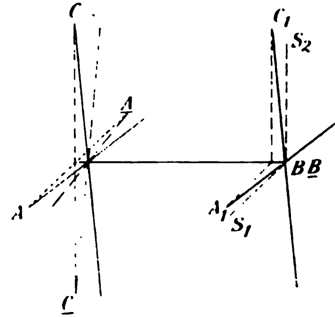


Fig. 107.

Um die Parameter der Zwillingsebene nach Seite 122 zu erhalten, muß man die Neigung OP zu den drei Kristallachsen kennen. Nötigenfalles findet man sie durch Rechnung; die Winkel seien λ, μ, ν. Nun setzt man OP gleich einer beliebigen Strecke und konstruiert mit Hilfe von λ, μ, ν die rechtwinkeligen Dreiecke OPA_1, OPB_1 und OPC_1, was die Parameter $OA_1 : OB_1 : OC_1$, für eine Ebene parallel der Zwillingsebene liefert.

Um endlich den Fußpunkt P in der Ebene $A_1B_1C_1$ zu erhalten, konstruiert man die Durchschnittsgerade dieser Ebene $A_1B_1C_1$ mit der Ebene OPC_1 (also mit einer Ebene durch die Zwillingsnormale und eine Kristallachse). Die erhaltene Gerade C_1P schneidet eben dann die Zwillingsachse in Punkt P.

Die Konstruktion des Achsenkreuzes erfolgt dann weiter wie bei 2.

Diese Art von Zwillingsbildung kommt häufiger im triklinen System vor. Zwillingsachse (Fig. 107) sei die b-Achse (Periklingesetz). Man zeichnet die Spur der irrationalen Zwillingsebene mit den beiden Achsenebenen AOB und COB,

nämlich BS_1 und BS_2[1]); dann macht man $\underline{A}A \parallel S_1B$ und $\underline{C}C \parallel S_2B$, wobei $\underline{C}C$ und $\underline{A}A$ von der verlängerten OB halbiert werden. Das Achsenkreuz des Kristalles in Zwillingsstellung ist $O\underline{A}\underline{B}\underline{C}$.

Beispiele: Zur Erläuterung der Zeichnung von Zwillingskristallen auf Grund eines Achsenkreuzes seien zwei Beispiele angeführt[2]).

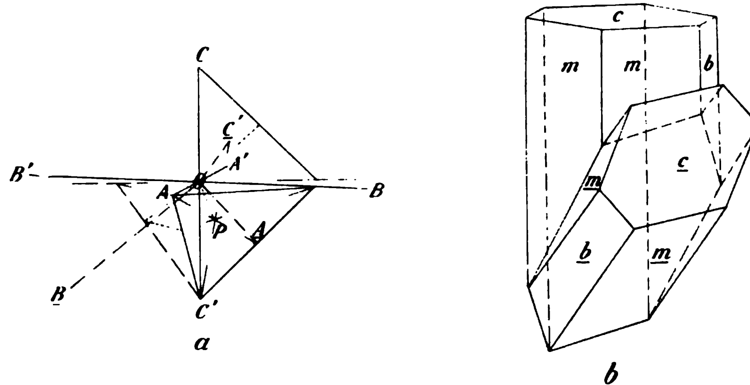


Fig. 108.

Fig. 108b zeigt einen Staurolithzwilling der Kombination $m\{110\}$, $b\{010\}$, $c\{001\}$ (nur teilweise dargestellt) nach der Fläche $(23\bar{2})$ (Fall 2 S. 126). In Fig. 108a ist zuerst das gewöhnliche Achsenkreuz ($a:b:c = 0{,}4723:1:0{,}6804$) $OABC$, gezeichnet nach Seite 117. Ferner enthält die Figur das Achsenkreuz in Zwillingsstellung $O\underline{A}\underline{B}\underline{C}$, die Normale OP (nach Seite 123 unten) auf die Zwillingsebene $(23\bar{2})$ und die zur Ermittelung der Projektion des Zwillingsachsenkreuzes erforderlichen Hilfslinien.

Fig. 109b zeigt einen Orthoklaszwilling nach dem Bavenoergesetz; Zwillingsebene (021); Kombination $c\{001\}$, $b\{010\}$, $m\{110\}$, $\omega\{11\bar{1}\}$, $x\{10\bar{1}\}$, $y\{20\bar{1}\}$. $a:b:c = 0{,}6585:1:0{,}5554$; $\beta = 116^\circ 3'$. Zuerst (Fig. 109a) wurde das normale Achsenkreuz ($OABC$) nach Seite 120 gezeichnet (einfache Drehung um die vertikale c-Achse). Die Fig. 109a enthält ferner noch das Achsenkreuz in Zwillingsstellung ($O\underline{A}\underline{B}\underline{C}$) und die zu seiner Auffindung erforderlichen Hilfslinien, vor allem die Normale OP zur Zwillingsebene. [C_1Oa ist die Darstellung der Ebene $AOCA'$ in der Zeichnungsebene; CA_1 ($= OA$) ist dann im Verhältnis $Ca : aA_1 = Oa$: Achsen-

[1]) Man stelle die Achsenebene $AOBA_1$ in den wahren Dimensionen dar, zieht von A_1 die Senkrechte auf OB und teilt dann die projizierte Achse OB im erhaltenen Streckenverhältnis; dasselbe geschieht mit $COBC_1$. Man erhält also zunächst in der Projektion zwei Gerade durch A_1 und C_1, zu welchen dann die Parallelen BS_1 und BC_2 zu ziehen sind. In Fig. 107 fallen zufällig einige Fußpunkte auf der b-Achse sehr nahe zusammen.

[2]) In der Projektion der Achsen verschiebe man vorher zur Erhöhung der Übersicht das Zwillingsachsenkreuz parallel sich selbst in der Richtung OP (Fig. 105—109) um eine passende Strecke. Der Abstand $2 \times OP$ würde der wahren Lage entsprechen.

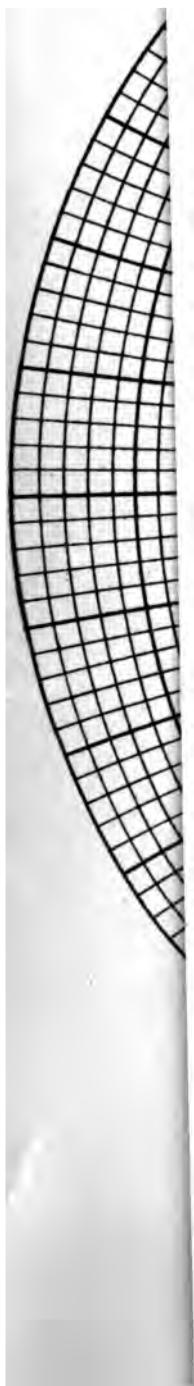
länge a zu teilen. Ebenso ist COB' durch COB'' in der wahren Größe dargestellt; $Ob \perp CB''$; es ist CB' im Verhältnis $Cb : bB''$ zu teilen. Auf

Fig. 109.

diese Weise erhält man schließlich OP mit Hilfe des Teilpunktes auf $B'C$ (Parallele zu OA) und auf CA' (Verbindungsgerade mit B'). Man mache nun $PC = P\underline{C}$; $PB' = PB'$ und ziehe $B\underline{B} \parallel B'\underline{B}'$. Ferner PO senkrecht zu OA; also fällt $O\underline{A}$ mit OA zusammen.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Gossner, Krystal




3 6105 017 925 327

